

البرمجة الخطية Linear Programming

تقدمت وسائل التحليل الرياضي للمشاكل الإدارية والاقتصادية تقدماً كبيراً وتعتبر البرمجة الخطية إحدى هذه الوسائل وقد استخدمت كلمة Programming كأداة تهدف إلى استغلال الموارد المتاحة للمنشأة من قوة عاملة و مواد أولية الخ لتحقيق أكبر عائد ممكن.

وتهدف البرمجة الخطية إلى الإجابة بأسلوب التحليل الرياضي على بعض الأسئلة وحل المشاكل بما يحقق أكبر ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة في ظل القيود والمحددات القائمة.

وعموماً فإن أداء أي عمل بأفضل الوسائل يعني في حد ذاته البحث عن الحدود الدنيا أو القصوى. فعندما تتعلق المشكلة بالتكاليف فإن الهدف عادة يكون الوصول إلى الحد الأدنى وإذا تعلق الأمر بالأرباح فإن الهدف يكون هو الوصول إلى الحد الأقصى.

صياغة المشكلة:

المشكلات الامثلية غالباً ما تأتي في صورة كلامية. وتحدد طريقة الحل في تصوير المشكلة في شكل نموذج رياضي يعبر عن المشكلة، ومن ثم يحل هذا النموذج بالاساليب المختلفة. ويمكن اتباع الخطوات التالية في بناء النموذج الرياضي.

1) حدد الكميات التي تحتاج الى قيم مثلى. وعرفها كمتغيرات لتأخذ الرموز

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

2) عرف هدف المشكلة وغير عنه رياضياً باستخدام المتغيرات .

3) حدد ومثل القيود في صورة متباينات وذلك باستخدام المتغيرات.

4) اضع الى النموذج الرياضي شرط عدم السالبة (ان جميع المتغيرات يجب ان تكون اكبر من او تساوي الصفر).

مثال 1:

يقوم جزار بعمل شطائر اللحم بتكوين من لحم بقري ولحم ماعز. يحتوي لحم البقر على 80% لحم و 20% دهون ويكلف 24 جنيه لكل كيلو في حين ان لحم الماعز على 68% لحم و 32% دهون ويكلف 18 جنيه لكل كيلو. ماهي كمية اللحم من كل نوع يجب ان يستخدمها المحل في كل كيلو من شطائر اللحم اذا علمت انه يجب تخفيض التكاليف والمحافظة علي نسبة الدهون. بحيث لا يزيد عن 25%؟

الحل:

المتغيرات:

نفرض ان وزن لحم البقر المستخدم في الكيلو = X

نفرض ان وزن لحم الماعز المستخدم في الكيلو = Y

دالة الهدف:

$$\text{Min } Z = 24X + 18Y \quad \text{تصغير}$$

القيود:

القيود الاولي: يحتوي كل كيلو علي $0.20 X$ من الدهون من لحم البقر و $0.32Y$ من الدهون من لحم الماعز ويجب الا تزيد الدهون في الشطيرة عن 0.25 .

$$0.20 X + 0.32 Y \leq 0.25$$

القيود الثاني: ويجب ان يكون وزن لحم البقر و لحم الماعز مجتمعين في كل كيلو من الشطائر هو كيلو واحد.

$$X + Y = 1$$

القيود الثالث: قيد عدم السالبة

$$X \geq 0 \quad \text{و} \quad Y \geq 0$$

النموذج الرياضي:

$$\text{Min } Z = 24X + 18Y \quad \text{تصغير}$$

$$0.20 X + 0.32 Y \leq 0.25 \quad \text{علماً بان:}$$

$$X + Y = 1$$

$$X \geq 0 \quad \text{و} \quad Y \geq 0$$

الحل البياني للمثال رقم 1

للحصول علي السم البياني الممثل للمشكلة يتم اتباع الخطوات التالية:

1. رسم محوري العمودي X والراسي Y كما هو موضح بالرسم التالي \geq

2. رسم القيود كما يلي:

القيود الاول :

بفرض ان $X = 0$ نجد ان $Y = 0.78$ نحصل على النقطة $(0, 0.78)$

بفرض ان $Y = 0$ نجد ان $X = 1.25$ نحصل على النقطة $(1.25, 0)$

نوقع النقتين $(0, 0.78)$ و $(1.25, 0)$ علي الرسم.

القيود الثاني :

بفرض ان $X = 0$ نجد ان $Y = 1$ نحصل على النقطة $(0, 1)$

بفرض ان $Y = 0$ نجد ان $X = 1$ نحصل على النقطة $(1, 0)$

نوقع النقتين $(0, 1)$ و $(1, 0)$ علي الرسم.

بحل المعادلتين:

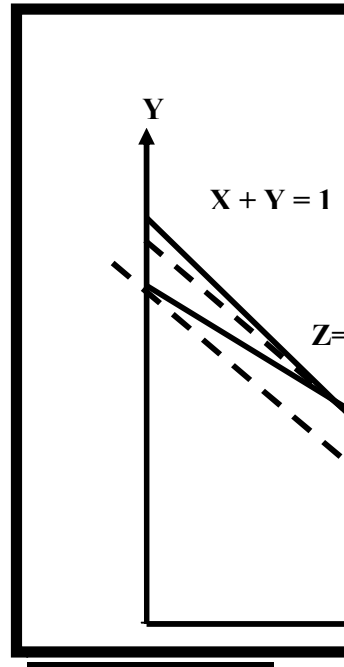
$$0.20 X + 0.32 Y \leq 0.25 \quad \text{و} \quad X + Y = 1$$

نحصل على:

$$X^* = 7/12, Y^* = 5/12$$

$$Z = 24(7/12) + 18(5/12) = 21$$

مما يعني ان المحال يجب ان يستخدم $7/12$ من لحم البقر والباقي $5/12$ من لحم الماعز وذلك يحقق اقل تكلفة والتي تساوي 21 جنيهه للكيلو.



مثال 2

حل البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= 5X + 2Y \quad \text{صغر} \\ \text{s.t. } & 2X + 5Y \geq 10 \\ & 4X - Y \geq 12 \\ & X + Y \geq 4 \\ & X, Y \geq 0 \end{aligned}$$

رسم القيود:

القيود الأولى: $4X - Y \geq 12$ بفرض ان $Y = 0$, نجد ان $X = 5$

وعندما نفرض ان $X = 0$ نجد ان $Y = 2$ اذا وصل النقطتين (0,5) و

(2,0)

القيود الثاني: $X + Y \geq 4$

بفرض ان $Y = 0$, نجد ان $X = 3$ وعندما نفرض ان $X = 0$ نجد ان Y

$-12 =$ والتي ليست على الرسم لذلك لذلك نفرض ان $X = 5$ نجد ان $Y =$

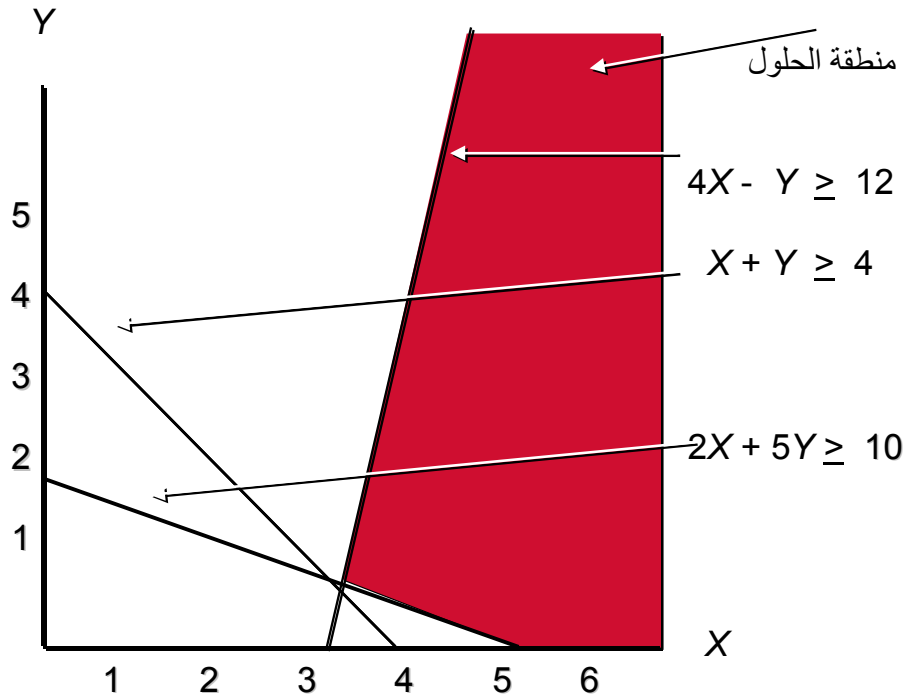
8

اذا وصل النقطتين (3,0) و (5,8) القيد الثالث: $X + Y \geq 4$

بفرض ان $Y = 0$, نجد ان $X = 4$ وعندما نفرض ان $X = 0$ نجد ان Y

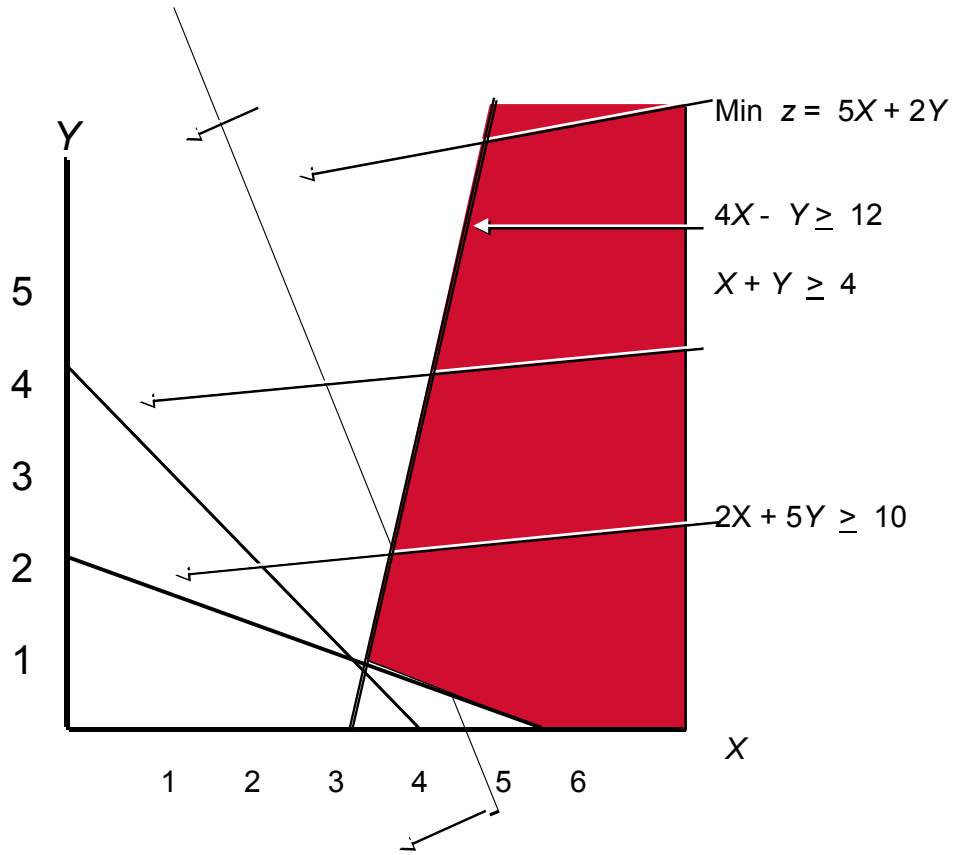
$= 4$

إذا وصل النقطتين (0,4) و (4,0)



رسم دالة الهدف:

افرض ان دالة الهدف تساوي أي رقم اختياري وليكن 20
 اذا $5X + 2Y = 20$, عندما $X = 0$ اذا $Y = 10$ وعندما $Y = 0$ اذا $X = 4$
 4. وصل النقطتين $(4,0)$ و $(0,10)$ حرك دالة الهدف في اتجاه تصغير القيمة
 حتى تصل إلى آخر نقطة في منطقة الحلول المحددة بأخر قيدين.



حل نقط التقاطع للقيود الحاكمة التي يقع عليها الحل

$$X + Y = 4 \quad , \quad 4X - Y = 12$$

بحل المعادلتين السابقتين نجد ان:

$$5X = 16 \text{ or } X = 16/5.$$

بالتعويض في $X + Y = 4$ نجد ان $Y = 4/5$

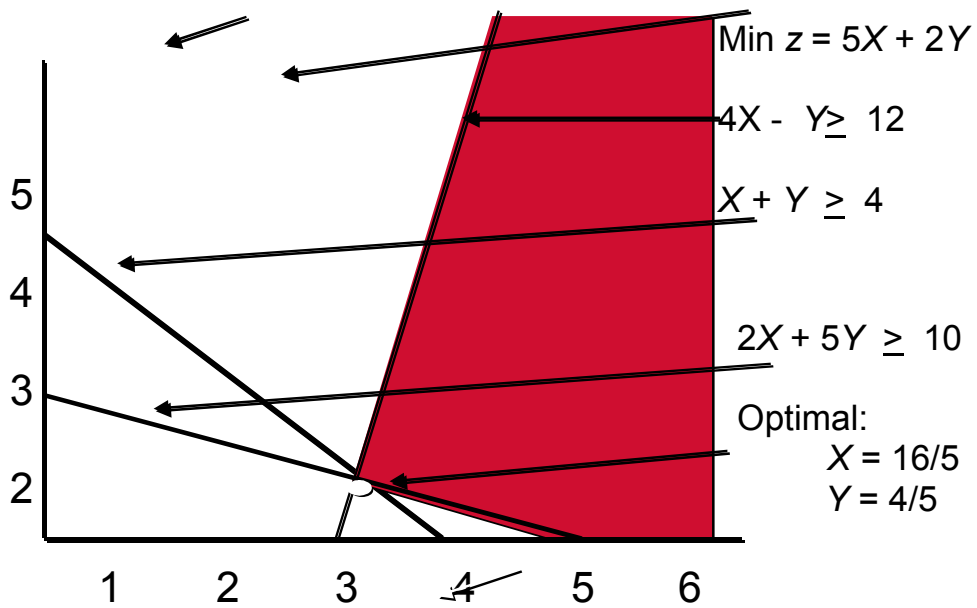
بالتعويض في دالة الهدف كما يلي:

$$z = 5X + 2Y = 5(16/5) + 2(4/5) = 88/5.$$

نجد ان الحل الامثل هو:

$$X = 16/5; Y = 4/5; z = 88/5$$

كما هو موضح بالرسم التالي



البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس

Linear Programming Using Simplex Method

نظرا لان طريقة الحل بالرسم البياني لا تصلح لأكثر من اثنين او ثلاث متغيرات وكذلك لو نظرنا الي المشكلات الواقعية نجد ان معظم المشكلات في الواقع العملي تحتوي على العديد من المتغيرات مما يصعب استخدام الطرق البيانية في الحل. ومن ثم استلزم وجود طرق اخري للتعامل مع مثل هذه المشكلات. ومن بين هذه الطرق والتي تصلح للتعامل مع مشكلات البرمجة الخطية طريقة السمبلكس Simplex Method. بالاضافة لصلاحية هذه الطريقة للتعامل مع المشكلات ذات المتغيرات كثيرة العدد فانه يوجد الكثير من برامج الحاسب الالي التي تعمل وفق هذه الطريقة والتي يمكن ان تستخدم لحل مشاكل البرمجة الخطية ذات الابعاد الكبيرة (عدد كبير من المتغيرات وعدد كبير من القيود) والتي تعطي حلول في اوقات صغيرة جدا وتجيب علي كثير من التساؤلات ومن اشهر تلك التساؤلات ما يعرف ب ماذا لو what if questions. وفيما يلي سوف نعرض الخطوات الرئيسية لطريقة السمبلكس.

طريقة السمبلكس

وفيما يلي يمكن اتباع الخطوات التالية للوصول الى الحل الامثل من خلال استخدام طريقة السمبلكس.

1. حدد اعلى قيمة سالبة في الصف السفلي من جدول السمبلكس باستثناء العمود الاخير، ويطلق على العمود الذي تظهر فيه هذه القيمة عمود العمل. في حالة تساوي اكثر من قيمة اختار احدهما.
2. كون نسبا من خلال قسمة القيم الموجبة في عمود العمل على القيم المناظرة لها في اخر عمود وذلك باستثناء اخر صف. وان لم يوجد قيم موجبة في عمود العمل فان المشكلة ليس لها حل.
3. اختار العنصر الذي ينتمي الي عمود العمل والذي له اقل نسبة (يسمى العنصر المحوري)
4. استخدم العمليات الاولية لتحويل العنصر المحوري الى واحد صحيح وبقي العمود اصفار.
5. استبدل المتغير x في صف المحور والعمود الاول بالمتغير x في الصف الاول وعمود المحور (عمود المتغيرات الاساسية).
6. كرر الخطوات من 1-5 حتى تحصل على جدول ليس به اعداد سالبة في الصف الاخير باستثناء العمود الاخير.

7. نحصل على الحل الامثل من خلال تخصيص كل في العمود الاخير والمتغير المناظر له في العمود الاول . وباقي المتغيرات تاخذ قيمة صفر. والقيمة المثلي للهدف z^* هي العدد الموجود في الصف الاخير والعمود الاخير وذلك في حالة التعظيم. والقيمة السالبة لهذا العدد في حالة التصغير.

مثال 3

$$\text{Max } Z = x_1 + 9x_2 + x_3 \quad \text{تعظيم}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \quad \text{علماً بان:}$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل:

تحويل المتباينات الي الصيغة القياسية كما يالي:

$$\text{Max } Z = x_1 + 9x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$x_4 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \quad \text{علماً بان:}$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

تكوين جدول السمبلكس من الصيغة القياسية كما يالي:

		x₁	x₂	x₃	x₄	x₅	
		1	9	1	0	0	
x₄	0	1	2*	3	1	0	9
x₅	0	3	2	2	0	1	15
zj-cj		-1	-9	-1	0	0	0

لحساب الصف الاخير من الجدول السابق يمكن تطبيق مايلي:

$Zj =$ حاصل ضرب قيم العمود الثاني في القيم المناظرة لها في باقي الاعمدة ثم جمع حاصل الضرب لجميع قيم العمود.

$zj - cj =$ القيم المحسوبة سابقاً - القيمة المناظرة للعمود في الصف الاول.

اختيار العمود المحوري يكون العمود x_2 نظرا لانه صاحب اكبر قيمة

اختيار الصف المحوري بقسمة جميع قيم العمود الاخير على قيم العمود

المحوري الموجبة وذلك لتكوين النسب كمايلي: $9/2$, $15/2$

اختيار اقل نسبة ليكون وهي $9/2$ والتي تنتمي الي العنصر 2 الموضح ب * في

الجدول السابق

انشاء الجدول التالي باستخدام العمليات الاولية بتطبيق الخطوة 4 و 5 لنحصل

على الجدول التالي:

		x₁	x₂	x₃	x₄	x₅	
--	--	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	--

		1	9	1	0	0	
x_2	9	1/2	1	3/2	1/2	0	9/2
x_5	0	2	0	-1	-1	1	6
$z_j - c_j$		7/2	0	25/2	9/2	0	81/2

نظرا لان الصف الاخير في الجدول السابق كله قيم موجبة فانه يدل على اننا قد وصلنا الى الحل الامثل وهو كما يلي:

$$x^*_2 = 9/2, x^*_1 = x^*_3 = x^*_4 = x^*_5 = 0,$$

وذلك يعطي ربح اجمالي 81/2 جنيه.

تطبيق على الحاسب الالى Computer Applications

تخطيط الإنتاج لمنتج واحد

تلقى أحد مصانع السيارات طلبا بستة أتوبيسات ذات الدورين، على أن يقوم بتسليم اثنين في كل مرة خلال الثلاثة اشهر التالية. يتم تسليم الأتوبيسات للعميل في نهاية نفس شهر التجميع ، أو تخزينه لدى الشركة بتكلفة 3000 دولار في الشهر لكل أتوبيس لتوريدها خلال الشهر التالي . لا يوجد مخزون حالي لدى الصانع من هذه الأتوبيسات. ولا يرغب في وجود مخزون في نهاية المدة بعد استكمال العرض.

الأشهر			
3	2	1	
30	20	10	الطاقة الإنتاجية العادية بالوحدة
20	20	20	الطاقة الإنتاجية الإضافية بالوحدة
40	43	35	تكلفة الإنتاج العادية 1000 دولار للوحدة
45	47	39	تكلفة الإنتاج الإضافية 1000 دولار للوحدة

للتعامل مع مثل هذه المشكلة يمكن بناء نموذج البرمجة الخطية التالي كما يلي:

□ نفرض أن X_{ij} يمثل عدد الوحدات المطلوب إنتاجها في الشهر i لتوريدها في الشهر j بالطاقة العادية.

□ نفرض أن Y_{ij} يمثل عدد الوحدات المطلوب إنتاجها في الشهر i لتوريدها في الشهر j بالطاقة الإضافية.

النموذج الرياضي لتخطيط الإنتاج لمنتج واحد

دالة الهدف:

الوصول إلى خطة إنتاج للأتوبيسات المتعاقد عليها بأقل تكلفة (تكلفة تصنيع + تكلفة تخزين) ممكنة.

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & 35 X_{11} + (35+3) X_{12} + (35+6) X_{13} + 43 X_{22} + (43+3) \\ & X_{23} + 40 X_{33} + 39Y_{11} + (39+3) Y_{12} + (39+6) Y_{13} + 47 \\ & Y_{22} + (47+3) Y_{23} + 45Y_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & (35 X_{11} + 38 X_{12} + 41 X_{13} + 43 X_{22} + 46 X_{23} + 40 X_{33}) \\ & + (39Y_{11} + 42Y_{12} + 45 Y_{13} + 47 Y_{22} + 50 Y_{23} + 45 Y_{33}) \end{aligned}$$

قيود الطاقات الإنتاجية العادية

$$\begin{array}{lll} X_{11} + X_{12} + X_{13} & \leq 10 & \text{الشهر الأول} \\ X_{22} + X_{23} & \leq 20 & \text{الشهر الثاني} \end{array}$$

$$X_{33} \leq 30 \quad \text{الشهر الثالث}$$

قيود الطاقات الإنتاجية الإضافية

$$Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} \leq 20 \quad \text{الشهر الأول}$$

$$Y_{22} + Y_{23} \leq 20 \quad \text{الشهر الثاني}$$

$$Y_{33} \leq 20 \quad \text{الشهر الثالث}$$

قيود التوريد

$$X_{11} + Y_{11} \geq 20 \quad \text{الشهر الأول}$$

$$X_{12} + Y_{12} + X_{22} + Y_{22} \geq 20 \quad \text{الشهر الثاني}$$

$$X_{13} + Y_{13} + X_{23} + Y_{23} + X_{33} + Y_{33} \geq 20 \quad \text{الشهر الثالث}$$

قيود عدم السلبية

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{22}, X_{23}, X_{33}, Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}, Y_{22}, Y_{23}, Y_{33} \geq 0$$

جميع الكميات أكبر من أو تساوي الصفر (يقوم الحاسب بوضع هذا القيد)

حل النموذج الرياضي

وباستخدام الحاسب الآلي يمكن أن يحل هذا النموذج الرياضي للحصول على الخطة الإنتاجية التي تحقق اقل تكلفة ممكنة في ظل القيود المفروضة كالتالي:

$$X_{11} = 10 , Y_{11} = 10 , Y_{12} = 10 , X_{22} = 10 , X_{33} = 20$$

بتكلفة إجمالية (2390 ألف دولار)

ويمكن تلخيص خطة الإنتاج فيما يلي:

- إنتاج عدد ثلاثون سيارة في الشهر الأول للوفاء بتوريد الشهر الأول وتخزين 10 سيارات للشهر الثاني وذلك على النحو التالي:
- عدد 10 سيارات بالطاقة العادية،
- عدد 20 سيارة بالطاقة الإضافية.
- إنتاج 10 سيارات في الشهر الثاني بالطاقة العادية.
- إنتاج عدد 20 سيارة في الشهر الثالث بالطاقة العادية.

مشاكل التخصيص

Assignment Problems

تتضمن مشكلة التخصيص جدولة العاملين فردا فردا ومن المفترض ان يكون عدد العاملين مساويا عدد الأعمال ويجب ضمان هذا الشرط بإضافة عاملين وهميين او عمل إضافية عند الحاجة من اجل المحافظة على هذا الشرط. ويكون الزمن (التكاليف) c_{ij} اللازم للعامل رقم i لإتمام العمل رقم j معروفاً ومن ثم يكون الهدف هو تخصيص العمال على الأعمال بحيث تتم إجمالي الأعمال في اقل وقت ممكن.

الأعمال

	1	2	3	...	n	
1	C11	C12	C13	...	C1n	
2	C21	C22	C23	...	C2n	
العمال	3	C31	C32	C33	...	C3n
...	
n	Cn1	Cn2	Cn3	...	Cnn	

خطوات الحل:

1. اطرح اقل قيمة في كل صف من كل القيم في هذا الصف
2. اطرح اقل قيمة في كل عمود من كل القيم في هذا العمود.
3. حدد اذا ما كان يوجد عدد n من الاصفار بحيث لا يوجد صفريين في نفس العمود او الصف.
4. غط كل الاصفار في المصفوفة بأقل عدد من الخطوط الرئيسية والعرضية بحيث يغطي الخط كل العمود او الصف وبحيث يكون عدد الخطوط اقل من n وان يكون عدد ممكن من الخطوط.
5. اطرح اقل عدد غير مغطى من القيم الغير مغطاة وأيضا أضف هذا للعدد إلى القيم المغطاة بخطيين متقاطعين (راسي وافقي)
6. اختار عدد n من الاصفار بحيث لا صفريين في نفس العمود او الصف وبذلك يكون تخصيص العمال الي الاعمال عندهم.
7. احسب إجمالي الوقت عن طريق جمع جميع القيم محل تلك الاصفار.

مثال:

		ماكينة				
		I	II	III	IV	V
عامل	A	15	10	25	25	10
	B	1	8	10	20	2
	C	8	9	17	20	10
	D	14	10	25	27	15
	E	10	8	25	27	12

الحل:

ب طرح اقل قيمة في كل صف من كل القيم في هذا الصف نحصل على المصفوفة التالية:

		ماكينة				
		I	II	III	IV	V
عامل	A	5	0	15	15	0
	B	0	7	9	19	1
	C	0	1	9	12	2
	D	4	0	15	17	5
	E	2	0	17	19	4

ب طرح اقل قيمة في كل عمود من كل القيم في هذا العمود نحصل على

المصفوفة التالية:

		ماكينة				
		I	II	III	IV	V
عامل	A	5	0	6	3	0
	B	0	7	0	7	1
	C	0	1	0	0	2
	D	4	0	6	5	5
	E	2	0	8	7	4

نلاحظ انه لا يوجد عدد n من الازهار وغير مشتركة في صف او عمود لذا يجب تغطية كل الازهار في المصفوفة بأقل عدد من الخطوط الرئيسية والعرضية بحيث يغطي الخط كل العمود او الصف وبحيث يكون عدد الخطوط اقل من n وان يكون عدد ممكن من الخطوط انظر المصفوفة التالية:

		ماكينة				
		I	II	III	IV	V
عامل	A	5	0	6	3	0
	B	0	7	0	7	1
	C	0	1	0	0	2
	D	4	0	6	5	5
	E	2	0	8	7	4

نبحث عن اقل قيمة غي مغطاة وهي (2) اطرحها من القيم الغير مغطاة
وأیضا أضف هذا للعدد (2) إلى القيم المغطاة بخطيين متقاطعين (راسي وافقي)
فنحصل علي المصفوفة التالية:

		ماكينة				
		I	II	III	IV	V
عامل	A	5	2	6	3	0
	B	0	9	0	7	1
	C	0	3	0	0	2
	D	2	0	4	3	3
	E	0	0	6	5	2

بالنظر الي المصفوفة السابقة نجد انه يوجد عدد n من الاصفار بحيث لا
صفرين في نفس العمود او الصف وبذلك يكون تخصيص العمال الي العمالة
عندهم. انظر المصفوفة التالية:

		ماكينة				
		I	II	III	IV	V
عامل	A	5	2	6	3	0
	B	0	9	0	7	1
	C	0	3	0	0	2
	D	2	0	4	3	3
	E	0	0	6	5	2

احسب إجمالي الوقت عن طريق جمع جميع القيم محل تلك الاصفار كما يلي:

$$A V + B III + C IV + D II + E I = \text{إجمالي اقل التكلفة}$$

$$10 + 10 + 20 + 10 + 10 =$$

$$60 =$$

تلخيص الحل:

يتم تخصيص العامل A علي الماكينة V

و يتم تخصيص العامل B علي الماكينة III

و يتم تخصيص العامل C علي الماكينة IV

و يتم تخصيص العامل D علي الماكينة II

و يتم تخصيص العامل A علي الماكينة I

بإجمالي اقل التكلفة = 60 جنية.

تمارين على البرمجة الخطية

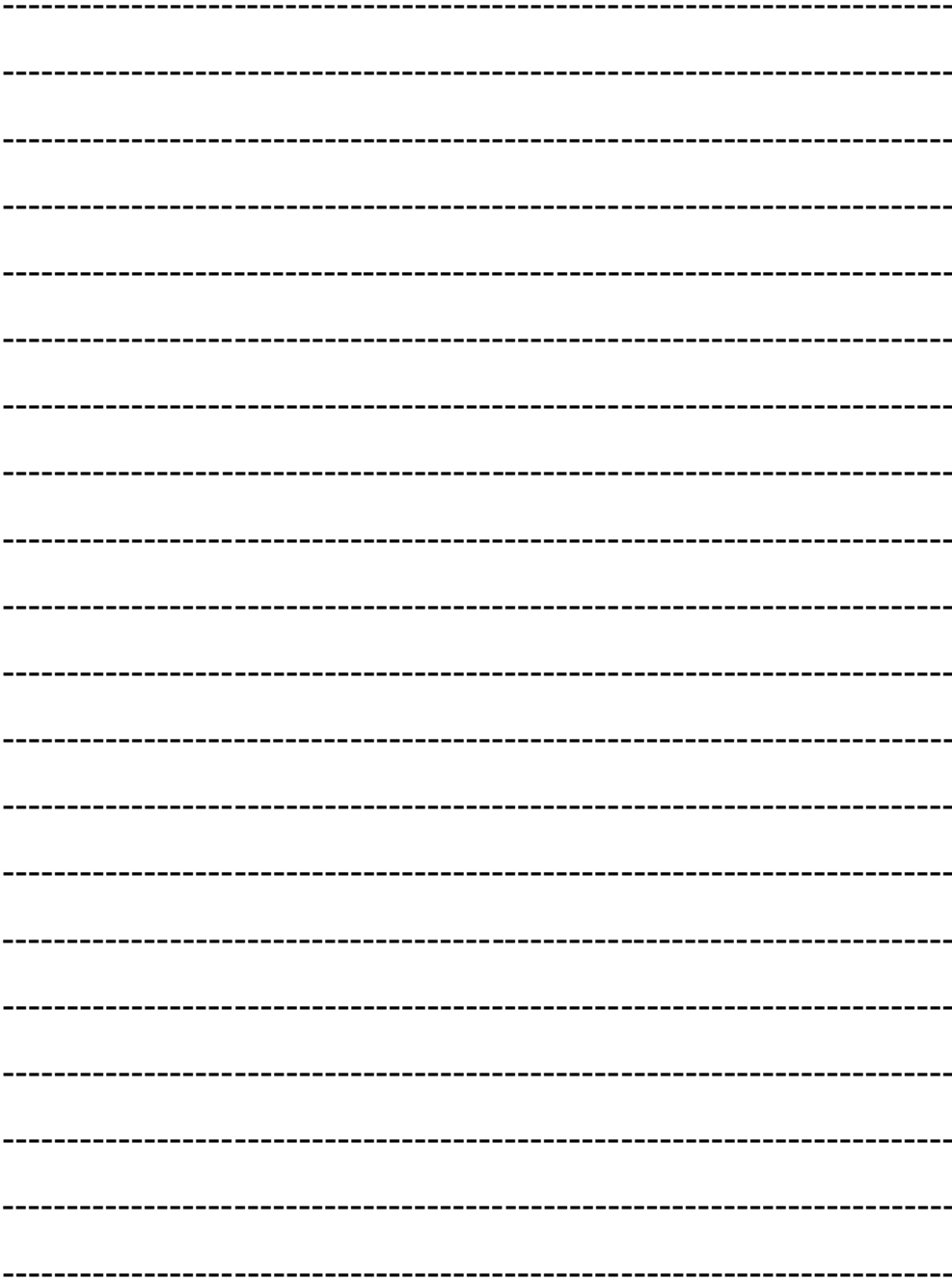
تمرين:1

شركة تقدم بإنتاج نوعين من هياكل الدرجات النوع الأول الفاخر والثاني والتي يتم إنتاجها باستخدام نوعين من المواد الخام وهي الألومنيوم والحديد وكان ربح الوحدة من الهياكل الفاخرة يقدم بمقدار 10 ج ، والثاني لهياكل الدرجات المحترفين بقدر 15 ج.

الحديد	الألومنيوم	
3	2	الهياكل الفاخرة
2	4	لهياكل الدرجات المحترفين

ما هو عدد الهياكل التي يجب على الشركة إنتاجها علماً بأن إجمالي الألومنيوم المستخدم في الأسبوع لا يتعدى 100 كجم وان إجمالي الحديد الصلب المستخدم في الأسبوع ≥ 80 كجم وذلك لتعظيم ربح الشركة. كون النموذج الرياضي للمشكلة

الحل



تمرين 3:

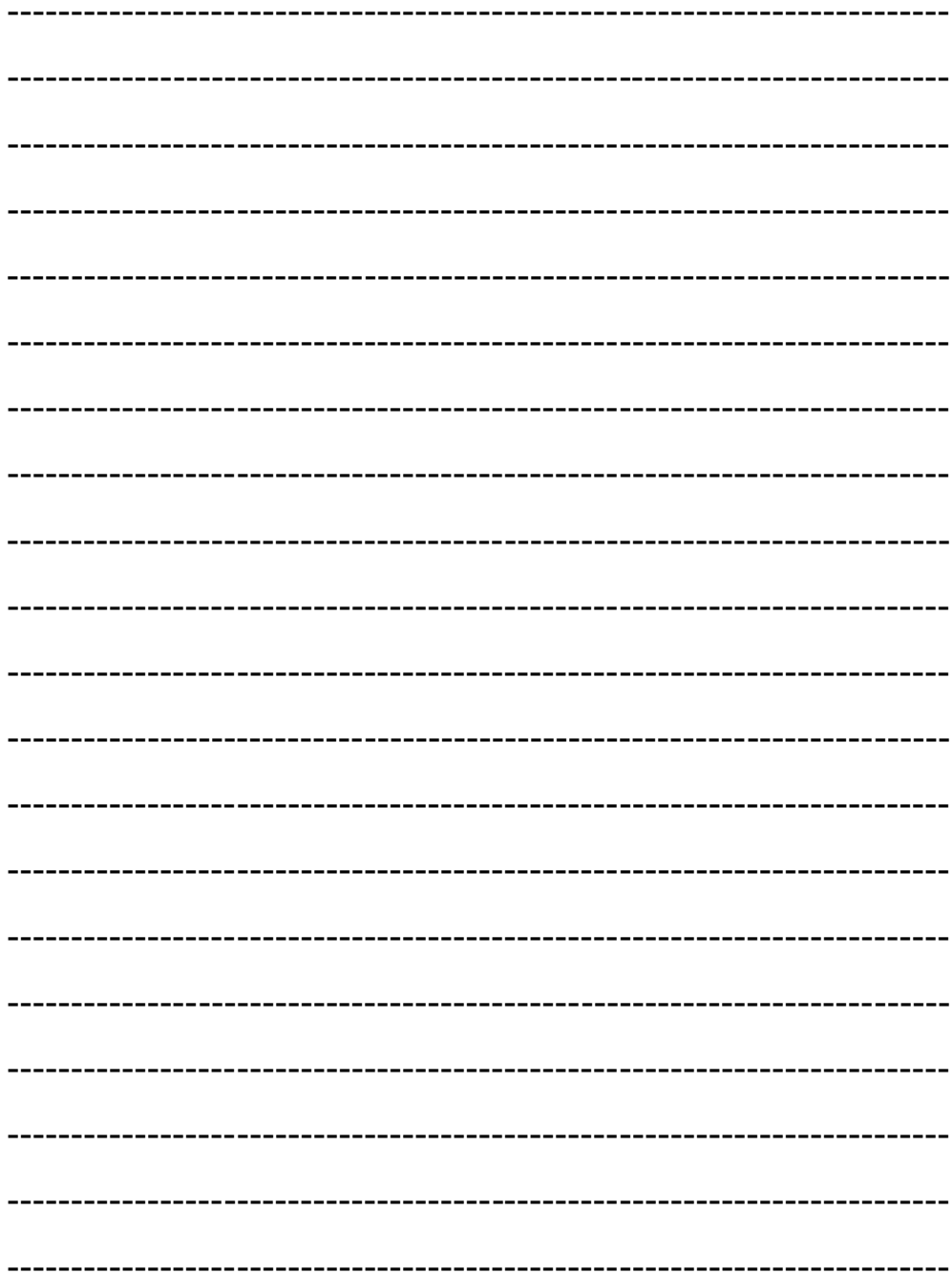
استخدم طريقة السمبلكس لحل المشكلة التالية:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 9x_2 + x_3 \quad \text{تعظيم}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 18 \quad \text{علماً بان:}$$

$$6x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



تمارين على مشاكل التخصيص

تمرين 1

احسب أحسن تخصيص للعمالة على مجموعة الماكينات والذي يحقق أقل تكلف طبقاً للمعلومات المتوفرة في المصفوفة التالية:

		ماكينة				
		M1	M2	M3	M4	M5
عامل	E1	15	10	25	25	10
	E2	14	10	25	27	15
	E3	8	9	17	20	10
	E4	1	8	10	20	2
	E5	10	8	25	27	12

الحل:

تمرين 2

احسب أحسن تخصيص المقاولون على مجموعة المشروعات والذي يحقق أقل تكاليف طبقا للمعلومات المتوفرة في المصفوفة التالية:

		مشروع				
		P1	P2	P3	P4	P5
مقاول	C1	15	10	25	25	10
	C2	14	10	25	27	15
	C3	8	9	17	20	10
	C4	1	8	10	20	2
	C5	10	8	25	27	12

الحل:
