بحث حول الاحتمالات

نظرية الاحتمال هي النظرية التي تدرس احتمال الحوادث العشوائية ، فالبنسبة للرياضيين تعتبر الإحتمالات عبارة عن أرقام محصورة في المجال بين 0 و+1 تحدد احتمال حصول أو عدم حصول حدث معين عشوائي أي غير مؤكد . يتم تحديد احتمال الحدث E بالقيمة حسب بدهيات الاحتمال.

كما ندعو احتمال الحدث E علما بحدوث الحدث F : الاحتمال الشرطي للحدث Eمع العلم بحدوث F.نمثل هذا الاحتمال الشرطي بالنسبة بين احتمال التقاطع بين الحدثين ( أي حدوثهما معا ) إلى احتمال حدوث الحدث F ، أي . إذا لم تتغير قيمة الاحتمال الشرطي للحدث E علما بوقوع F عن القيمة الأصلية غير الشرطية للحدث أي أن الاحتمال واحد في حال وقوع F أو عدم وقوعه عندئذ نقول أن هذين الحدثين مستقلين.
تناقش نظرية الاحتمالات مصطلحين غاية في الأهمية : المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

**نظرة أكثر تجريدية**
تهتم نظرية الاحتمالات بتحليل الظواهر العشوائية .إن العناصر المركزية لنظرية الاحتمال هي الأحداث ,المتغيرات العشوائية ,والعمليات العشوائية .لقد قاد كولموغوروف عملية تأسيس دراسة نظرية حديثة للاحتمالات بدمجه بين فكرة فضاءالعينة التي قدمها ريتشارد فون ميزيس Richard von Misesوبين نظريةالقياس وعرض في عام 1933 نظام بديهيات لنظرية الاحتمالات مالبث أن أصبح بلا منازع الأساس البدهي لنظرية الاحتمالات الحديثة.
يمكن تمثيل الفضاء الاحتمالي على أنه ثلاثية , حيث

- Ωتمثل مجموعة غير خالية، تدعى أحيانا فضاء العينة"sample space",
- هو-σ جبر لفضاء العينة التي ندعو كل عنصر من عناصرها : حدثا . event

لكي نستطيع ان نقول أن يشكل سيغما-جبر هذا يقتضي بالتعريف انها تحوي ,Ω وأن متممة أي حدث تشكل حدثا أيضا ، واجتماع أي تسلسل أحداث هو حدث أيضا .

- Pيمثل قياس احتمالي probability measure على , أي ,قياس بحيث يكون

$P(\Omega) = 1$, أي أن احتمال كامل فضاء العينة يساوي الواحد. تدعى الثنائية فضاءا مقاسا أو فضاءا قابلا للقياس لأنه يتحول إلى فضاء احتمالي بتعريف قياس احتمالي عليه.
من المهم أن نلاحظ أن P تشكل دالة معرفة على وليس على فضاء العينة.Ω

**احتمال شرطي**
احتمال شرطي، في دراسة الإحتمالات .نفرض أن E حدث اختياري ما ضمن فضاء العينة S بحيث . عندئذ نعرف احتمال وقوع الحدث A بفرض أن E قد وقع أو بعبارة أخرى الاحتمال الشرطي للحدثA عند وقوع ) E ويكتب: (

ترسل الاشارات اللاسلكيه على شكل "نقاط"و"خطوط "حيث عدد النقاط يساوي 3/4 عدد الخطوط.وبسبب الاخطاءفأن النقطه تصبح خطا باحتمال 3/2والخط يصبح نقطةباحتمال4/1 فإذا استلمت إشارة "نقطة"فما أحتمال أنها أرسلت"نقطة."
نظرية:
إذا كان الحادثين A و B مستقلين (Independent) فإن

**محاكاة**

المحاكاة هي عملية تقليد لأداة حقيقية أو عملية فيزيائية او حيوية .تحاول المحاكاة ان تمثل و تقدم الصفات المميزة لسلوك نظام مجرد أو فيزيائي بوساطة سلوك نظام آخر يحاكي الأول.
تستخدم كلمة (محاكاة) في عدة مجالات بما فيها النمذجة للجمل الطبيعية و الأجهزة البشرية لمحاولة استكشاف تفاصيل هذه العملية . هناك محاكاة أيضا في التقنية و هندسة الأمانsafety engineeringحيث يكون الهدف فحص بعض سيناريوهات العمل في العالم الحقيقي و اختبار أمن بعض العمليات أو حتىمدى جدواها العلمية و الاقتصادية.

**طرق المحاكاة**

المحاكاة تهدف إلى دراسة و بناء نماذج و/أو برمجيات لتقليد نظام حقيقي، قائم او مزمع انشاءه، و ذلك بهدف دراسته، و تعرفه ساذرلاند واخرون (Sutherland,2003) بأنها نموذج تشغيل حقيقي او نظام مقترح لعملية بيئية، تستخدم فيها شبكات الاتصالات الحديثه للوصول إلى هذا العالم الافتراضي، ونظرا للميزات والخصائص التي تقدمها هذه الوسائط فأنها تمكننا من عبور العديد من حدود : الفئات العمريه ، والتخصصات الاكاديميه ، المهن ، والمواقع الجغرافية ، فضلا عن الثقافيه والدينية والاجتماعية والاقتصادية.

فمثلا قبل بناء سفينة يتم إشتقاق نموذج للسفينة و النموذج هو عبارة عن عدة معادلات رياضية تصف علاقة المميزات الفزيائية للسفينة ببعضها كعلاقة الدفع بوزن السفينة و كمية الوقود المستهلكة، هذه العلاقة قد تكون أكثر أهمية للطائرات مثلا حيث تعطي هذه العلاقة مدى الطائرة إلخ...
و باستخدام المحاكاة فإنه يمكن توفير الكثير من المال حيث أنك ترى في الحاسوب إن كان إختراعك أو آلتك توافق المواصفات التي تريدها كما أنك تستطيع أن تتحقق من أمان طائرتك أو سفينتك و كل هذا قبل أن تقوم ببنائهما في الواقع. كما أن المحاكات تستخدم أيضا للتدريب حيث يتدرب الطيارون الجدد مثلا في أجهزة محاكات تجعلهم و كأنهم يطيرون طائرة حقيقية مع فرق بسيط هو أنه أثناء المحاكات مسموح لهم بالخطئ الشيء الذي قد يكون مميتا إذا حدث في الواقع.
و يمكن تصنيف أنواع المحاكات على عدة أسس لكن أهمها هو تصنيف المحاكات على أساس طبيعة الميزة التي نحاكيها و على أساس ذلك يكون هناك :

- محاكاة باستخدام الاحداث المنفصلة
- المحاكاة المتواترة(continuous)
- المحاكاة المختلطة(Hybrid Simulation ).

و يتصل علم أو فن المحاكات اتصالا شديدا بالرياضيات خاصة الرياضيات الرقمية و الفيزياء و المعلوماتية
فرضيات الاحتمال
بدهيات نظرية الاحتمال الأساسية

«Axioms Of Probability»
»برتراند رسل» في «المعرفة الانسانية» والذي نقل بدوره عن الاستاذ» تشارلي دنبر برود «Charlie Dunbar Broad»«في مجلة «العقل» ست بدهيات لنظرية الاحتمال.

- احتمال«A» و – «B»حال تحققهما معا – يرمز له ب
- احتمال«A»و -«B»حال تحقق احدهما – يرمز له ب

وما يهمنا اساسا في البدهيات هو معرفة ان:

- افتراض «A» و «B» يعني ان هناك قيمة واحدة فقط ل«A/B»، وعليه نستطيع ان نتحدث عن احتمال «A» على اساس.«B»
- احتمال وقوع الحدث الاكيد = 1.
- احتمال وقوع الحدث المستحيل = «0» .
- اذا كان الحدث «A» مجموعة جزئية من الفضاء العيني «S» فان:

**بدهية الاتصال**

Conjunctive Axiom
يرجع الفضل في صياغة هذا المبدا إلى الدكتور تشارلي دنبر برود استاذ الفلسفة في جامعة كمبردج . ومفاده اننا اذا اردنا معرفة قيمة احتمال حدثين معا (حدث «A» وحدثB» ») فاحتمالهما معا يساوي حاصل ضرب احتمال حدث (A) في احتمال حدث (B) على تقدير وقوع .(A) ويرمز لذلك ب:

أما اذا كان «A» و «B» حدثين مستقلين، فهذا يعني ان

**امثلة توضيحية** :
المثال الاول:
لو اردنا حساب درجة احتمال تفوق الطالب «A» بالمنطق والرياضات معا ، وجب علينا ضرب احتمال تفوقه في المنطق باحتمال ان يكون متفوقا في الرياضيات بعد كونه متفوقا في المنطق.
المثال الثاني:
اذا كان لدينا اناء به 12 كرة، 5 منها لونها احمر، و 4 لونها اخضر،و 3 لونها اصفر، ولم تكن الطابات موزعة بطريقة تقوي احتمال اختيار احداها كيفيا، واخترنا من المجموع 3 طابات عشوائيا، بان كانت النتيجة اننا اخرجنا من الوعاءثلاث طابات بقيت جميعا خارج الوعاء. فما هو احتمال ان تكون الطابات كلها حمراء؟ والجواب: اما احتمال ان تكون الطابات كلها حمراء، فبدهية «الاتصال» تتكفل بذلك فنقول:
ان احتمال وقوع «A» معB» » مع «C» على التوالي يساوي: احتمال وقوع) × «A» احتمال وقوع «B» بعد تحقق «(«A؛ (احتمال وقوع «C» بعد تحقق (A) و. ((B)
ويكون احتمال كونها جميعا حمراء = احتمال ان تكون الاولى حمراء × احتمال ان تكون الثانية حمراء بعد كون الاولى حمراء × احتمال ان تكون الثالثة حمراء بعد كون الاولى والثانية حمراوين.
ولا يخفى ان:
– 1احتمال كون الاولى حمراء = (عدد الطابات الحمراء / عدد مجموع الطابات) = (12/5.)
– 2احتمال كون الثانية حمراء = (عدد الطابات الحمراء بعد اختيار الطابة الاولى / عدد مجموع الطابات بعد اختيارالطابة الاولى )= (11/4.)

– 3احتمال كون الثالثة حمراء = (عدد الطابات الحمراء بعد اختيار الطابتين الاولى الثانية / عدد مجموع الطابات بعداختيار الطابتين الاولى والثانية) : ( 10/3.(

1/22=(60/1320)= 3/10 * 4/11 * 5/12 =

**بدهية الانفصال**

وكذلك يرجع الفضل في صياغة هذا المبدا إلى الدكتور تشارلي دنبر برود . ومفاد هذه البدهية ان درجة احتمال ان يتصفA» » بواحدة على الاقل من صفتي «B» و «C» هي درجة احتمال اتصاف «A» ب «B» وحدها + احتمال اتصاف «A» ب «C» وحدها – احتمال اتصاف «A» ب «B» و «C» معا .

ويرمز لذلك ب:

وقد تقدم ان بدهية الاتصال تتكفل بتحديد احتمال اجتماع «A» و «B» والمشار اليه باحتمال A Ç B.

ملاحظتان مهمتان:

– 1لو كان الحدثان منفصلين :

– 2في بدهية الانفصال ذكرنا احتمال اتصاف «A» ب «B» وحدها وكذلك الامر بالنسبة إلى «C»وهذا يعني اننا ناخذ بعين الاعتبار كلا الاحتمالين في نفسيهما، بغض النظر عن تحقق الحدث الاخر. وهذا ما اشار اليه «رسل» في» المعرفة الانسانية. «

امثلة توضيحية

المثال الاول:

والمثال القريب من المثال المتقدم في «بدهية الاتصال» هو اننا لو اردنا معرفة درجة احتمال ان يكون الطالب متفوقا في المنطق «او» الرياضيات، جمعنا درجة تفوقه في الرياضيات مع درجة احتمال تفوقه في المنطق، وطرحنا من ذلك درجة احتمال تفوقه فيهما معا التي تحددها بدهية الاتصال، فيكون الناتج هو درجة احتمال تفوقه في احدهما .===== المثال الثاني: ===== مثال «برتراند رسل: «

اذا سحبنا بطاقتين من 52 بطاقة نصفها احمر والنصف الاخر اسود، فان احتمال خروج احدى البطاقتين على الاقل حمراء = احتمال خروج الاولى حمراء + احتمال خروج الثانية كذلك – احتمال خروجهما معا كذلك:

] (52/26×51/25)-(26/52+51/25)على ما تحدده بدهية الاتصال[

1 = (25/51×1/2) – 1/2 + 1/2 = 25/102 -

المثال الثالث:

اذا سحبنا كرتين من وعاءين (من كل وعاء كرة)، في الاول منهما 8كرات بيضاء و كرتان سوداوان، وفي الثاني 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء، فان درجة احتمال كون احداهما على الاقل بيضاء = احتمال كون الاولى بيضاء + احتمال كون الثانية كذلك – احتمال كونهما معا كذلك

= 10/8 + 6/10.92/100=48(6×8)/10 –

المثال الرابع:

مثال اذا كانت لدينا حقيبتان تحتوي الحقيبة الاولى على 5 كرات زرقاء وخمس كرات صفراء ،

وتحتوي الحقيبة الثانية على6 كرات زرقاء واربع كرات صفراء، وقمت بسحب كرتين: واحدة من الحقيبة الاولى واخرى من الحقيبة الثانية، فما هي درجة احتمال ان تخرج احداهما زرقاء؟
الجواب = ان احتمال خروج احداهما زرقاء = احتمال خروج الاولى زرقاء + احتمال خروج الثانية زرقاء – احتمال خروجهما معا زرقاوين
10/5 + 10/6 – (10/5*10/6) = 10\5 + 10\6 – 8\10 = 3\10
مسالة الحوادث الثلاث
وهي تناقش مالو كانت ثلاث حوادث تحدث معا، و اردنا معرفة احتمال وقوع حدث على الاقل من بين ثلاثة حوادث، وذلك لان احتمال أحد الحوادث على الاقل يعني:

)على ما تقدم في بدهية الانفصال(

لكن لا باس على اي حال بتقريب الفكرة بمثال:
مثال: اذا كان لدينا وعاء فيه ست طابات حمراء واربع صفراء، واخترنا عشوائيا منها ثلاثا، فما هو احتمال خروج طابة حمراء على الاقل من الطابات الثلاث؟
الجواب: الصياغة الاخرى للمسالة المذكورة، هي محاولة معرفة احتمال ان تكون الطابة الاولى حمراء او الطابة الثانية اوالطابة الثالثة، وحلها كالتالي:

3/5=6/10=6/(6+4)=
ومرد تساوي الاحتمالات إلى ان P(A) و P(B) وP(C) تعني اخذ الاحتمالات بحد نفسها، وبغض النظر عن الاخرى.

1/3=30/90=5/9*6/10=
ووجهه انها كلها ترمز إلى اخذ احتمال تحقق احدها بعد تقديرتحقق الاخر.

1/6=120/720=4/8×5/9×6/10=
اذا: احتمال خروج طابة حمراء على الاقل من الطابات الثلاث المختارة يساوي 29/30.
التاكد من نتيجة «بدهية الانفصال» بواسطة «بدهية الاتصال:«
وللتاكد من هذه النتيجة، يمكن الاستعانة ببدهية الاتصال، حيث نحسب احتمال خروج الطابات كلها صفراء ونطرح هذا الاحتمال من «واحد» (1) الذي هو احتمال الحدث الاكيد للطرف الاخر – اعني الطابات الحمراء – ، وذلك لان» خروج الطابات كل ها صفراء» و «خروج واحدة حمراء على الاقل» عبارة عن حدثين متضادين يساوي مجموعهماواحدا كما تقدم.

- احتمال خروج الطابات كلها صفراء=10/4×3/9×8/2=1/30
- احتمال خروج طابة على الاقل حمراء=1-1/30=29/30، وهو ما توصلنا اليه اعلاه.

خلاصة اجراء قواعد الاحتمال
– 1بملاحظة تكرار الحوادث:
اما بملاحظة تكرار الحوادث فان قياس الاحتمال تارة يكون في الحوادث البسيطة واخرى في الحوادث المركبة:
– 1قياس الاحتمال في الحوادث البسيطة:
»بصفة عامة نقول ان درجة احتمال وقوع حدثة ما، هي كسر بسطه واحد ومقامه عدد الممكنات»

. لكن بشكل اعم، يمكن الاستعانة بقاعدة عامة تجري غالبا وهي:
احتمال =(A) عدد الحالات المتوفرة ل / «A»عدد الحالات الممكنة ل.«A»
– 2قياس الاحتمال في الحوادث المركبة او الاحتمال الشرطي: ان قياس الاحتمال في الحوادث المركبة يتخذ احدى صيغتين تقدمتا معنا مفصلا، و هما عبارة عن بدهيتي «الاتصال» و«الانفصال.«
– 2بملاحظة طريقة الحدوث:
اما بلاحظة طريقة الحدوث ، فاننا على ما تقدم استعنا تارة بقاعدة الجمع، واخرى بقاعدة الضرب:
**قاعدة الجمع:**
تستخدم قاعدة الجمع لقياس قيمة احتمال احدى الحوادث بالنسبة إلى الاخرى وهي تعتمد اساسا على بدهية الانفصال . وقد ذكرنا انها تجري فيما لو كنا نريد قياس احتمال أحد الحدثين او الحوادث على الاقل، وقلنا بان:
احتمال وقوع الحدثين يرمز له ب
.<>
احتمال وقوع أحد الحدثين : احتمال وقوع الحدث الاول + احتمال وقوع الحدث الثاني – احتمال وقوعهما معا (اما احتمال وقوعهما معا فتتكفل بدهية الاتصال بتحديده.(
او قل بعبارة اخرى:
احتمال وقوع احدى الحوادث = مجموع احتمالات وقوعها – احتمال انضمامها.
وان الحدثين لو كانا منفصلين، فان احتمال وقوعهما معامستحيل (يساوي صفرا)، الامر الذي يعني ان احتمال وقوع أحد الحدثين = احتمال وقوع الحدث الاول + احتمال وقوع الحدث الثاني.
قاعدة الضرب:
تستخدم قاعدة الضرب لقياس قيمة احتمال اجتماع حدثين معا، وهي تعتمد اساسا على بدهية الاتصال.و قدذكرنا انها تجري فيما لو كنا نريد قياس احتمال وقوع الحدثين معا.
وقلنا بان: 1 – احتمال وقوع أحد الحدثين.
– 2احتمال وقوع الحدثين معا= احتمال وقوع الحدث الاول× احتمال وقوع الحدث الثاني بعد تحقق الاول.
– 3وان الحدثين لو كانا مستقلين، فلا معنى لتحقق احدهما بشرط تحقق الاخر الامر الذي يعني ان
:
)احتمال اجتماعهما :احتمال تحقق الاول ؛ احتمال تحقق الثاني. (
**متغير عشوائي**
المتغير العشوائي هو مصطلح يستخدم في الرياضيات التصادفية .المتغير العشوائي يرمز إلى دالة رياضية و التي تظهر نتائج تجربة عشوائية معينة. و المتغير العشوائي هو متغير يمكن له أن يأخذ أي قيمة عشوائية غير محددة سلفا بالتالي يمكن اعتباره النتيجة العددية لإجراء تجربة غير حتمية النتيجة. فعملية دحرجة النرد للحصول على رقم من ضمن المجموعة {1، 2، 3، 4، 5، 6} هي عملية توليد لمتغير عشوائي هو ناتج عملية الدحرجة.
المتغير العشوائي يختلف عن غيره من المتغيرات العشوائية بأنه لا يأخذ النتيجة الفعلية المحتمة للتجربة بل يأخذ احدى احتمالات التجربة العشوائية .
انحراف معياري

**بيان الانحراف المعياري**
في الإحصاء و نظرية الإحتمالات يعتبر الانحراف المعياري القيمة الأكثر استخداما من بين مقاييس

التشتت الإحصائي لقياس مدى التبعثر الإحصائي، أي أنه يدل على مدى امتداد مجالات القيم ضمن مجموعة البيانات الإحصائية.
و " التباين Variance " وهو معدل مربعات انحرافات العلامات في التوزيع عن الوسط الحسابي.
ويكون الانحراف المعياري Standard deviation عندها الجذر التربيعي للتباين بالنسبة لمجموعة البيانات الإحصائية.
يتأثر التباين أو الانحراف المعياري بالقيم المتباعدة أو المتطرفة ولكنه لا يتأثر كثيرا بالتغيرات التي تطرأ على العينة، كما أنهما يرتبطان بالوسط الحسابي للتوزيع، بمعنى ان التشتت الذي نعبر عنه بالتباين أو الانحراف المعياري ينسب إلى الوسط الحسابي وليس لاي نقطة أخرى في التوزيع.
مثال على حساب الانحراف المعياري
سنأخذ هذا المثال البسيط على حساب الانحراف المعياري لكل من الرقمين 8 و4.
الخطوة 1 :إحسب المتوسط حسابي للرقمين.
$(4 + 8) / 2 = 6$
الخطوة 2 :احسب انحراف كل من الرقمين السابقين عن المتوسط حسابي.
$4 - 6 = - 2$
$2 = 8 - 6$
الخطوة 3 :قم بتربيع الانحرافين:
$( - 2)2 = 4$
$4 = (2)2$
الخطوة 4 :إجمع التربيعين الناتجين:
$4 + 4 = 8$
الخطوة 5 :قم بتقسيم الناتج على عدد القيم (وهو في مثالنا 2:(
$8 / 2 = 4$
الخطوة 6: قم بإيجاد الجذر التربيعي الموجب:

إذاً الانحراف المعياري هو 2.
حساب الانحراف المعياري لمتغير
نفرض أن لدينا المتحولات (أو المتغيرات( ، يعطى الانحراف المعياري لهذه القيم بالعلاقة:

حيث أن N هو عدد المتحولات (المتغيرات). ويمكن تبسيط العبارة السابقة إلى التالي:

يمكن البرهنة على ذلك بواسطة العملية الجبرية التالية :

بما أن علم الإحصاء يحلل و يعرض البيانات المتفرقة بحيث تكون ذات معنى معين أو تعطي انطباعا معيناً فان تباين هذه البيانات يمثل مشكله كبيرة في فهم سلوك البيانات.
خصائص الانحراف المعياري
• يمكن تعريف الانحراف المعياري كالآتي :
........ (10)
حيث a أي وسط بالإضافة للوسط الحسابي . ومن كل هذه الانحرافات المعيارية ، نجد أن أصغرها يمكن الحصول عليه عندما تأخذ من خصائص الوسط الحسابي .
• في التوزيع الطبيعي (وهو أحد التوزيعات الإحصائية المهمة) نجد أن :

1. 68.27% من الحالات تقع بين و (أي على بعد انحراف معياري واحد على كل جانب من الوسط الحسابي) .
2. 95.45% من الحالات تقع بين و (أي على بعد انحرافين معياريين على كل جانب من الوسط الحسابي) .
3. 99.73% من الحالات تقع بين و (أي على بعد ثلاثة انحرافات معيارية على كل جانب من الوسط الحسابي) .

• إذا افترضنا أن مجموعتين مكونتين من الأرقام (أو توزيعان تكراريان ومجموع تكراراتهما هما ) وتباينهما معطى بـ على الترتيب ولهما نفس الوسط الحسابي ، فإن التباين المشترك أو المجمع للمجموعتين (أو للتوزيعين) التكراريين) هو :

مصدر:

[مجلة نبع الجزائر التربوية]