استخدام طريقة المعيار الشامل
في البرمجة الرياضية المتعددة الدوال

خالد عبدالله العلاف*

الملخص

تنـاول البحـث أهـم التطـورات الخاصـة بالبرمجـة الرياضـية (التقليديـة) Mathematical Programming (MP) وظهـور مـا يسـمى حـديثاً بالبرمجـة الرياضـية المتعـددة الـدوال (الأهـداف) Math. Prog. With Multiple Objective (MOMP) والتي باتت تشكل العمود الفقري لتطبيقات عملية اتخاذ القرارات تحت عدة معايير Multi-Criteria Decision Making (MCDM) والتـي بدورها احتلت مكانة واضحة المعالم في نظم دعم القرارات المحوسبة Decision Support System (DSS) وعلم بحوث العمليات وعلم الإدارة (OR/MS).

ومن خلال دراسة هذه النماذج واستخداماتها تم اختيار طريقة المعيار الشامل لدراسة مفاهيمها وخصائصها ومحدداتها ومراحل الحل فيها ليتم إنجاز الخوارزمية والمخطط الانسيابي لها. وبعد ذلك تم الأخذ بطريقة المعيار الشامل لايجاد أفضل الحلول النهائية الممكنة لمشكلة قرار مقيدة، خطية، متعددة الدوال، دون أية أسبقيات أو أوزان. وتم التوصل إلى مجموعة من الحلول التي توصف بأنها غير سائدة لحالة دراسية تطبيقية مع إجراء بعض المقارنات بما يمكن تحقيقه باستخدام نماذج رياضية أخرى.

Using the Method of Global Criterion in Multi-Objective Mathematical Programming

Khalid A. Al-Alaaf

Abstract

The research deal with the must important specific development of the traditional mathematical programming (MP) and appears the mathematical programming with multi-objective (MOMP) which forms the vertebral column in application of Multi-Criteria Decision Making (MCDM), Decision Support System (DSS), operations research / management science (OR/MS).

After studying this new models and tools and its uses, the researcher chose Global Criterion Method to study it concept and there properties, the must limitation and stages of the solution to achieve the algorithm and the flow-chart of it. And using the Global Criterion Method to obtained the best feasible final solutions to constrained decision, linear, multiple objective problem with out any priority or weighted.

Finally, the study concludes to many feasible solution which called, non-dominated solutions to the application a case study and comparing with the result of using another models.

* مدرس مساعد / قسم العلوم المالية والمصرفية، كلية الإدارة والاقتصاد – جامعة الموصل.

المقدمة

ما زال أسلوب صياغة وبناء النماذج رياضياً للمشاكل قيد الدراسة من أهم وأبرز أساليب بحوث العمليات / علم الإدارة OR/MS وأكثرها استخداماً في مختلف القطاعات والمؤسسات، وتعدّ البرمجة الرياضية Mathematical Programming بنماذجها المتنوعة الخطية وغير الخطية من ثمرات هذا الأسلوب.

وخلال العقدين الأخيرين جرت العديد من التطورات المهمة على نماذج البرمجة الرياضية التقليدية عموماً سواءً من حيث تعريف مفردات الصياغة أو هيكلية البناء للنموذج أو طرق الحل فيها أو حتى فرضياتها وصفاتها من حيث سكونيتها وأحادية الأهداف في نماذجها العامة.

ورافق تلك التطورات استخدامات حديثة لها في مجال نظم دعم القرارات Decision Support System (DSS) واتخاذ القرارات تحت عدة معايير (MCDM) على اختلاف أنماطها الفردية Individual، الجماعية Group، مدعومة بالتطورات الخاصة في مجال تقنيات الحاسوب المختلفة ولغات البرمجة ونظم الاتصالات وشبكات المعلومات والاستخدام الواسع للانترنيت.

وفي هذا البحث سنتناول جانب من هذه التطورات الخاصة بدالة الهدف للنموذج وظهور ما يسمى بالبرمجة الرياضية المتعددة الدوالMath. Prog. With Multiple Objective التي باتت تعرف بالمختصر (MOMP) والتي تهتم بتعدد المعايير Multi-Criteria أو الدوال Multi-Function أو الأهداف Goals سواءً أن كانت هذه الدوال خطية أم لا خطية.

وسيقتصر البحث على دراسة نموذج برمجة رياضية متعددة الدوال (MOMP) واستخدام طريقة المعيار الشامل Method of Global Criterion في إيجاد الحلول للنموذج المصاغ والتي تتسم بكونها حلول غير سائدة Non-Dominated Solution من خلال حالة دراسية افتراضية لمؤسسة صحية ترغب بتعظيم أرباحها بعدة دوال متساوية الأوزان والأسبقيات من أجل الوصول بالنظام لديها إلى درجة الأمثلية وبوجود عدد من القيود.

مشكلة البحث (نظرياً)

في هذا البحث نتناول مشكلة لدى متخذ القرار تمتلك المواصفات الآتية:

1. وجود عدة دوال هدف لدى متخذ القرار Multi-Objective Function .
2. الدوال لها نفس الأهمية (الوزن) لدى متخذ القرار No-Weighted.
3. الدوال لها نفس الأسبقية لدى متخذ القرار No-Priority.
4. وجود مجموعة من القيود Constraints.
5. الدوال والقيود يمكن التعبير عنها رياضياً (بشكل خطي أو لا خطي).

وفي بحثنا هذا ستقتصر الدراسة التطبيقية عندئذٍ على العلاقات الخطية فقط وبهذا يمكن اختزال مشكلة البحث أعلاه على أنها " مشكلة أمثلية مقيدة، متعددة الدوال، خطية، من دون أية أسبقيات، من دون أية أوزان ".

أهمية البحث

تتأتى أهمية البحث من أهمية عملية صناعة وتحليل القرارات على مختلف المستويات وفي مختلف القطاعات والأنظمة، وخاصةً في ظل المنظمات التي تتميز بكبر حجمها وتعقد نظامها الداخلي والتي تعتمد في قراراتها غالباً على ما توفره نظم بحوث العمليات (OR) وعلم اتخاذ القرارات (DM) والمعروف حالياً فيما يسمى بنظم دعم القرارات المحوسبة (DSS) للوصول بالنظام إلى أمثلية تمتلك العديد من الأهداف والغايات التي قد تكون متضاربة أحياناً والمقيدة في أحياناً أخرى على الغالب.

أهداف البحث

يمكن تثبيت النقاط التالية كأهداف للبحث:

- دراسة نماذج البرمجة الرياضية المتعددة الدوال (MOMP) والتي تشكل الهيكل الأساسي في عملية اتخاذ القرارات تحت عدة معايير (MCDM).
- تقديم ماهية طريقة المعيار الشامل وإنجاز خوارزمية ومخطط انسيابي لها.
- اختبار إمكانية التوصل إلى حلول غير سائدة (ربما تكون أقل أمثلية) لكنها أكثر إقناعاً More Satisfactory عند إجراء التحليلات والتقييمات مقارنة بأساليب ونماذج أخرى.

الجانب النظري

أولاً. تطور البرمجة الرياضية (MP) إلى البرمجة الرياضية المتعددة الدوال (MOMP)

ما زالت البرمجة الرياضية(*) التقليدية Traditional Math. Prog. أحد أهم وأبرز نماذج بحوث العمليات وعلم اتخاذ القرارات الشائعة الاستخدام بنماذجها المتنوعة، وتعدّ البرمجة الخطية Linear Programming (LP) أحد أهم هذه النماذج وأشهرها، كما تعدّ طريقة السمبلكس Simplex Method أبرز طرق الحل فيها التي تقودنا إلى الحل الأمثل Optimal Solution والذي يعرف بأنه " أفضل الحلول الممكنة على الإطلاق ولا يوجد حل أفضل منه وغالباً ما يكون وحيداً ". وهو ما اهتمت به نماذج البرمجة الرياضية التقليدية لعدة عقود عند التطبيق.

(*) لمزيد من التفاصيل عن البرمجة الرياضية:

Render, Barry, Ralph M. Stair Jr. & Michael E. Hanna, "Quantitative Analysis for Management", 8th.ed., 2003, Prentice-Hall, New Jersey, USA, PP. 233-333.

إن لنموذج (MP)(*) شكل رياضي عام يمكن التعبير عنه بالنموذج رقم (1) الآتي:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Max } f = \underline{c}^T\underline{x} \\ \text{S. to.} \quad A\,\underline{x} = \underline{b} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث يحتوي النموذج أعلاه على دالة هدف واحدة وعلى (n) متغير قرار وعلى (m) قيد بالإضافة إلى أن هذا النموذج يمكن أن يكون خطياً أو لا خطياً.

إلاّ أن لهذا النموذج مجموعة من الفرضيات والشروط لابد من توفرها عند الصياغة وبناء النموذج والحل كذلك منها ما يخص أحادية دالة الهدف الموصوفة عادةً إما تعظيم Maximize أو تصغير Minimize والتراكمية والنسبية للعلاقات ما بين متغيرات القرار وأنها نماذج ساكنة تعطي للدوال والقيود المصاغة ذات الأهمية والأوزان، وكذلك ذات الأسبقية عند إيجاد الحلول وأن متغيرات القرار فيها تمتلك صفة الاستمرارية. أما عند الحل فتفترض الاعتماد على الحل الصفري للوصول إلى الحل الأمثل المنشود والموجود في أحد زوايا منطقة الحل الممكن التي توصف عادةً بأنها محددة ومغلقة.

إن لنماذج البرمجة الرياضية العديد من التطبيقات المعروفة في مجالات التخطيط والرقابة والسيطرة النوعية وجدولة الإنتاج والتوزيع والنقل.. وغيرها وكل هذا استخدم في شتى القطاعات والمؤسسات المحلية والعالمية.

إن اهتمام نماذج البرمجة الرياضية ينصب عموماً على ما يجب أن يكون عليه النظام System أو الوصول بالنظام قيد الدراسة والبحث إلى حالة الأمثلية في الأداء واستغلال الموارد سواءً إن كان هذا النظام عسكرياً أو مدنياً أم صناعياً أم تعليمياً أم زراعياً أو حتى كيميائياً. وهكذا احتلت البرمجة الرياضية تطبيقات واسعة في عقد الستينات والسبعينات وما زالت كذلك الآن وخاصةً بعد التطورات التي أدخلت عليها في عقد الثمانينات والتسعينات والتي تناولت فرضياتها الأولية في الصياغة والنمذجة وكذلك طرق الحل فيها، تزامن ذلك مع التطور الحاصل في لغات البرمجة العلمية من جهة، والتطور التقني للحاسوب من جهةٍ أخرى، كل هذه التطورات أعطت للبرمجة الرياضية مميزات إضافية للخوض في إيجاد حلول لمشاكل تخص أنظمة كبيرة

(*) تم اعتماد ذات المختصرات في البحوث والمؤتمرات العالمية وبالترجمات الممكنة التالية:

Linear Programming (LP): البرمجة الخطية.

Mathematical Programming (MP): البرمجة الرياضية.

Multiple Objective Mathematical Programming (MOMP): البرمجة الرياضية المتعددة الدوال.

وينوه الباحث إلى إمكانية وجود ترجمات أخرى فيما يخص المصطلحات الحديثة مثل (MOMP) تترجم إلى البرمجة الرياضية المتعددة دوال الهدف أو البرمجة الرياضية متعددة الأهداف أو الأغراض.

الحجم Large System ومعقدة Complex كان من المستحيل أو الصعوبة البالغة دخولها قبل ذلك.

وفي هذا البحث سنتناول أهم التطورات الحاصلة في نماذج البرمجة الرياضية التقليدية من جانب واحد فقط ، وهو امتلاكها لدالة هدف واحدة Only One objective Function أو معيار وحيد Unique Criteria للحكم على أمثلية النظام Optimalty of System موصوفة عادةً بشكل دالة تراكمية في حالة تعظيم (ربحية أو إنتاجية) أو تصغير (كلف أو خسائر).

وهكذا تم التوسع بنماذج (MP) إلى نماذج (MOMP) والتي يمكن التعبير عنها رياضياً بالنموذج رقم (2) أدناه:

$$\left.\begin{array}{l} \max\ [\ f_j\ (\underline{x})\ ] \\ \text{s. to. } g_i\ (\underline{x}) \le o,\ j = 1,2,\ldots,k \\ \qquad\qquad\qquad i = 1,2,\ldots,m \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

النموذج أعلاه يحتوي على (k) دالة هدف و(m) قيد، و(n) متغير قرار وإن أي من القيود والدوال يمكن أن تكون خطية أو لا خطية.

ثانياً. تطور اتخاذ القرارات (DM) إلى اتخاذ القرارات تحت عدة معايير (MCDM)

إن التطور الحاصل(*) في البرمجة الرياضية بانتقالها من تناول دالة هدف واحدة إلى عدة دوال أهداف رافقه تطور باستخدامها في عملية اتخاذ وتحليل مشاكل القرار Decision Problem، وبهذا تم الانتقال بها من اعتمادها على المعيار الواحد One-Criteria عند اتخاذ القرار إلى اعتماد عدة معايير Multi-Criteria، وبهذا ظهر بما يسمى حديثاً(**) اتخاذ القرارات تحت عدة معايير Multi-Criteria Decision Making (MCDM) والذي يسمى أحياناً بتحليل القرارات تحت عدة معايير Multi-Criteria Decision Analysis (MCDA).

(*) لمزيد من التفاصيل يمكن الرجوع إلى المصادر التالية:

1. Winston, Wayne L., "Operation research: Applications and algorithm", 1994, Duxbury Press , U. S. A., PP. 771-823.
2. Zeleny, M., "Multiple Criteria Decision Making", 1982, McGraw-Hill, Inc., USA., PP. 120-320.

(**) استخدمت الترجمات الممكنة التالية:

Multi-Criteria Decision Making (MCDM): اتخاذ القرارات تحت عدة معايير.

Multi-Criteria Decision Making (MCDM): تحليل القرارات تحت عدة معايير.

ولمزيد من التفاصيل عن هذين المصطلحين وأوجه الاختلاف والتشابه بينهما يمكن الدخول إلى موقع الجمعية العالمية بهذا التخصص وبذات الرمز (MCDM) على شبكة الانترنيت.

باختصار شديد، يمكن القول إن نماذج البرمجة الرياضية المتعددة الدوال (MOMP) ما هي إلا العمود الفقري لعملية اتخاذ وتحليل القرارات تحت عدة معايير (MCDM) و(MCDA).

ولغرض توضيح نماذج (MOMP) المختلفة والمستخدمة في (MCDM) يقترح الباحث كتابة نموذج (MOMP) المرقم (2) بالشكل رقم (3) التالي:

$$\left.\begin{array}{l} VMP \Rightarrow \max\ [\, P_1W_1\, f_1\,(\underline{x}),\, P_2W_2\, f_2\,(\underline{x}),\, \ldots,\, P_jW_j\, f_j\,(\underline{x}),\, \ldots,\, P_kW_k\, f_k\,(\underline{x})] \\ \qquad\qquad \text{s. to. } g_i\,(\underline{x}) \le o, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad j = 1,2,\ldots, k \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i = 1,2,\ldots, m \end{array}\right\} \ldots\ldots (3)$$

حيث:

VMP : يمثل متجه تعظيم المشكلة في (MOMP).

$\underline{x}$: تمثل متجه متغيرات القرار.

P_j : يمثل الأسبقية j المرافقة للدالة $f_j\,(\underline{x})$.

W_j : يمثل الوزن j المرافق للدالة $f_j\,(\underline{x})$.

$gi\,(\underline{x})$: تمثل القيود المفروضة على المشكلة.

$fj\,(\underline{x})$: دالة الهدف j.

ويمكن تصنيف مشاكل القرار ونماذجه الرياضية المستخدمة لإيجاد الحل النهائي على النحو التالي:

أ. مشاكل القرار غير المقيدة Non-Constrained Decision Problem

وفي هذا النوع من المشاكل الصغيرة الحجم عادةً(*) لا يوجد أية قيود ولا يتطلب صياغة نموذج رياضي للمشكلة، بل يوجد عدة صفات (معايير) Multi-Arttibute (i=1,2,…,m) معبر عنها على شكل أغراض فقط Objective Only أو غايات متناقضة(*) -Multi

---

(*) لمزيد من التفاصيل حول أدوات حل مشاكل القرار غير المقيدة:

1. Hamalainen, Raimo P., "Decisionnarium-Aiding Decisions, Negotiating and Collecting Opinions on the Web" 2008, to appear in Journal of MCDM.
2. Mustajoki, Jyri and Hamalainen, Raimo P., "Web-Hipre: Global Decision Support by Value tree and AHP Analysis", 2000, INFOR., Vol. 38, No. 3, Aug., PP. 208-220.
3. العلاف، خالد عبدالله، "التغير في صناعة القرار: من المعيار الواحد إلى تعددية المعايير"، 2008، المؤتمر الدولي العلمي الثامن، جامعة الزيتونة الأردنية، عمان، الأردن.

(*) سميت غايات أو أغراض (Objective) لأنها قد تكون في حالة .Max أو .Min لأنها لا يمكن التعبير عنها على شكل دوال أغراض (Objective) رياضية مثل ($Max\ f = 2x_1 + 3x_2$) أو دوال أهداف (Goal) رياضية مثل ($Min\ f = 2d^-_1 + 3d^+_2$).

Conflicting Objective يـراد تحقيقهـا فـي اختيارنـا للبـديل الأمثـل Optimal All-Ternative من بين عدد قليل (j=1,2,…,n) من البدائل وعادةً ما تمثل هذه المشكلة بالشكل رقم (1) التالي:

بدائل / معايير	1	2	…	j	…	m
1	x_1^1	x_1^2	…	x_1^j	…	x_1^m
2	x_2^1	x_2^2	…	x_2^j	…	x_2^m
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i				x_i^j		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	x_n^1	x_n^2	…	x_n^j	…	x_n^m

شكل (1)

مخطط مشكلة قرار غير مقيدة

وتتم عملية اختيار البديل الأمثل إما فردياً Individual أو جماعياً Group، ومن أهم الأدوات Tools المستخدمة في هذا النوع من مشاكل القرار هي(**):

1. MAVT. 2. AHP. 3. IEP.

(**) تم اعتماد ذات المختصرات في البحوث والمؤتمرات العالمية وبالترجمات الممكنة التالية:

Multiatribute Value Theory (MAVT): نظرية القيمة المتعددة الصفات.

Analytic Hierarchy Process (AHP): إجراءات التحليل الهرمي.

Interactive Evaluation Procedures (IEP): إجراءات التقييم التفاعلية.

ب. مشاكل القرار المقيدة Constrained Decision Problem

وفي هذا النوع من المشاكل يكون لدى متخذ القرار عدة معايير Multi-Criteria، يمكن التعبير عنها بشكل عدة دوال أهداف مناظرة لها Multiple Objective Function أو يعبر عنها بعدة أهداف مناظرة لها Multiple Goals مع افتراض إمكانية وجود منطقة حل ممكنة تحتوي على عدد كبير من البدائل عادةً وتحقق جميع قيود المشكلة معاً.

وباعتماد نموذج (MOMP) المقترح سابقاً رقم (3) يمكن أن نحدد النماذج التالية:

1. نموذج (MOMP) من دون أية أسبقيات أو أوزان:

وفي هذا النوع من النماذج(*) لا يقدم متخذ القرار أي أنواع من المعلومات التفضيلية بخصوص دوال الهدف المتعددة المصاغة بناءً على المعايير المختارة المعتمدة في تحليل واتخاذ القرارات الخاصة بالمشكلة قيد البحث.

وبهذا يمكن اشتقاق النموذج رقم (4) التالي من نموذج (MOMP) رقم (3) المقترح من قبل الباحث سابقاً وكالآتي:

$$\left.\begin{array}{l} VMP \Rightarrow \max\ [\, f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \ldots, f_j(\underline{x}), \ldots, f_k(\underline{x})] \\ \qquad \text{s. to: } g_i(\underline{x}) \le o, \\ \qquad\qquad j = 1,2,\ldots,k \\ \qquad\qquad i = 1,2,\ldots,m \\ \qquad \text{Such that:} \\ \qquad P_1 = P_2 = \ldots = P_k = 1 \\ \qquad W_1 = W_2 = \ldots = W_k = 1 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ومن أهم طرق وأساليب حل هذا النوع من النماذج هي طريقة المعيار الشامل والتي مازالت أكثر الطرق استخداماً عند التطبيق، بالإضافة إلى وجود طرق أخرى مثل طريقة الانحرافات والمباراة.

2. نموذج (MOMP) مع عدة دوال مرتبة بأسبقيات:

وفي هذا النوع من النماذج يتوجب على متخذ القرار تقديم معلومات تفضيلية واضحة بخصوص دوال أو أهداف المشكلة المعبرة عن المعايير، على شكل أسبقيات مرتبة (أولاً، ثانياً، ... وهكذا)، وقد تحتوي في داخلها على أوزان عددية (1، 2، ...، وهكذا) أيضاً، وأهم النماذج المتعارف عليها بهذا الخصوص كالآتي:

(*) لمزيد من التفاصيل:

Hwang, C. L., S. R. Paidy, K. Yoon and A. S. M. Masud "Mathematical programming with multiple objectives: A Tutorial", "Computer and Operation Research", 1980, Vol. 7, PP. 7-11.

1-2 نموذج البرمجة الخطية المتعددة الدوال (MOLP):

ويعتبر من أهم النماذج(*) في مشاكل القرار المقيدة ويعبر عنه رياضياً بالنموذج (5) التالي:

$$\left.\begin{array}{l} VMP\Rightarrow \max [\, P_1 f_1(\underline{x}), P_2 f_2(\underline{x}), \ldots, P_j f_j(\underline{x}), \ldots, P_k f_k(\underline{x})] \\ \quad \text{s. to: } g_i(\underline{x}) \le o, \\ \qquad\qquad j = 1,2,\ldots, k \\ \qquad\qquad i = 1,2,\ldots, m \\ \quad \text{Such that:} \\ \quad P_1 >>> P_2 >>> \ldots >>> P_k \end{array}\right\} \ldots\ldots. (5)$$

وفي هذا النموذج يتم العمل بإيجاد الحل الأمثل للأسبقية P_1 (الممثلة بالدالة f_1) ومن ثم إيجاد الحل الأمثل للأسبقية الثانية P_2 (الممثلة بالدالة f_2) وهكذا على أن لا يتعارض ما تم تحقيقه بالأمثلية العليا P_1. وأهم طرق الحل فيها هي:

1. M.S.M.
2. Tow Phase R.M.S.M.
3. Dual M.S.M.

2-2 نموذج البرمجة الهدفية (GP):

ولهذا النموذج(**) مساحة واسعة من الاستخدامات ويعتبر من أهم نماذج (MOMP) ويتميز متجه الدوال فيه (دالة الإنجاز) باحتوائه على المتغيرات الانحرافية فقط (d_i^-, d_i^+) مع إمكانية وجود أوزان عددية أصلية W_j Cardinal Number, مثل (1، 2، .... وهكذا)، بالإضافة إلى تعامله بالأوزان الترتيبية Ordinal Number مثل (أولاً، ثانياً، .... وهكذا) لتحديد الأسبقيات P_j ويكتب نموذجها العام بالشكل (6) التالي:

$$\left.\begin{array}{l} \min [P_1W_1(\underline{d}^-, \underline{d}^+), P_2W_2(\underline{d}^-, \underline{d}^+), \ldots, P_LW_L(\underline{d}^-, \underline{d}^+)] \\ \quad \text{s. to: } g_i(\underline{x}) + d_i^- - d_i^+ = b_i \\ \qquad f_j(\underline{x}) + d_j^- - d_j^+ = b_j \\ \qquad d_i^-, d_i^+ \ge 0 \\ \qquad d_i^- . d_i^+ = 0, \\ \qquad\qquad j = 1,2,\ldots, k \\ \qquad\qquad i = 1,2,\ldots, m \\ \quad \text{Such that:} \\ \quad P_1 >>> P_2 >>> \ldots >>> P_L \\ \quad W_1, W_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, W_L \qquad \text{(Cardinal Number)} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots.(6)$$

(*) لمزيد من التفاصيل:

Zeleny, M., Op. Cit., PP. 280-314.

(**) لمزيد من التفاصيل:

1. Taha, Hamdy A., "Operations Research: An Introduction", 7th ed., 2003, Prentice Hill, USA, PP. 347-360.
2. العلاف، خالد عبدالله، "استخدام البرمجة الهدفية في تخطيط الإنتاج بالتطبيق على معمل الألبان في الموصل"، 1988، رسالة ماجستير غير منشورة، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة الموصل.

ومن أهم طرق الحل لهذا النموذج هي:

1. S.S.M.
2. Modifed S.M.
3. M.S.M.

3. نموذج (MOMP) مع أوزان معلومة الدوال:

وفي هذا النوع من النماذج يوجد لدى متخذ القرار معلومات محددة عن أهمية كل معيار (الممثل بدالة هدف) معبر عنها على شكل أوزان W_j وبهذا يمكن صياغة النموذج (7) التالي:

$$\left.\begin{array}{l} \max\ [\, W_1 f_1 (\underline{x}), W_2 f_2 (\underline{x}), \ldots, W_j f_j (\underline{x}), \ldots, W_k f_k (\underline{x})] \\ \qquad \text{s. to: } g_i (\underline{x}) \le o, \\ \qquad\qquad j = 1,2,\ldots, k \\ \qquad\qquad i = 1,2,\ldots, m \\ \qquad \text{Such that:} \\ \qquad W_1 + W_2 + \ldots + W_k = 1 \\ \qquad 0 \le W_j \le 1 \quad \forall\, W_j \quad \text{and must be known} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (7)$$

وتسمى طرق الحل لهذه النماذج بالطرق التفاعلية Interactive Methods ويمكن أن نجد العديد منها:

1. Interactive MOLP.
2. Interactive GP.
3. Method of Satisfactory Goals.

وأهم ما يميز هذه الطرق اعتمادها على التفاعل ما بين متخذ القرار ومراحل الحل وبهذا سيكون متخذ القرار شريكاً في الحل وتعتمد النتائج بصورة أساسية على ما يقدمه من تفضيلات أثناء الحل.

4. نموذج (MOMP) مع أوزان مجهولة الدوال:

وفي هذا النوع من النماذج تكون الأوزان غير معلومة الأهمية النسبية للدوال قيد الحل. وبهذا يمكن التعبير عن نموذجها العام بالشكل (8) التالي:

$$\left.\begin{array}{l} \max\ [\, W_1 f_1 (\underline{x}), W_2 f_2 (\underline{x}), \ldots, W_j f_j (\underline{x}), \ldots, W_k f_k (\underline{x})] \\ \qquad \text{s. to: } g_i (\underline{x}) \le o, \\ \qquad\qquad j = 1,2,\ldots, k \\ \qquad\qquad i = 1,2,\ldots, m \\ \qquad \text{Such that:} \\ \qquad W_1 + W_2 + \ldots + W_k = 1 \\ \qquad 0 \le W_j \le 1 \quad \forall\, W_j \quad \text{and unknown} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (8)$$

والطرق الخاصة بإيجاد الحلول النهائية لهذا النوع تسمى بالطرق المولدة Generation Methods وهي من الطرق المعقدة والصعبة والتي تعطينا أعداد كبيرة من الحلول النهائية على متخذ القرار أن يقيمها ويعطي الأوزان بحقها.

ومن أهم الطرق المتعارف عليها هي:

1. Parametrices Method.
2. Constraints Method.

ثالثاً. ماهية طريقة المعيار الشامل

إن طريقة المعيار الشامل تعتبر من الطرق القلائل التي اهتمت بايجاد الحلول النهائية لمشاكل القرار المقيدة والتي أمكن التعبير عنها رياضياً بالنموذج الرياضي (MOMP) رقم (4) والمعرف سابقاً، والذي يتميز بعدم وجود أية أسبقيات P_j أو أوزان W_j.

ويرى الباحث إن أهم خصائص هذه الطريقة:

- عدم حاجتها إلى أية معلومات تفضيلية (أسبقيات P_j أو أوزان W_j) عن دوال الأهداف المتعددة التي يحتويها النموذج قيد الحل.
- إمكانية استخدامها في نماذج (MOMP) الخطية منها وغير الخطية.
- تجزءتها للمشكلة الرئيسة Main Problem إلى عدة مشاكل فرعية Sub-Problem أصغر حجماً بعدد الدوال j.
- استخدامها لخوارزميات داخلية معروفة(*) أثناء مراحل الحل مثل Simplex و SUMT.
- قابليتها على إيجاد عدد كبير من الحلول الممكنة توصف بأنها حلول غير سائدة Non-Dominated Solutions.

(*) تعرف طريقة Simplex بأنها " مجموعة من الخطوات التي تبدأ بافتراض حل أساسي صفري ومن ثم تحسن الحل اعتماداً على اختيار المتغير الداخل والخارج وباعتماد العنصر المحوري يتم الحصول على حل أفضل وهكذا على عدة خطوات حتى التوصل إلى الحل النهائي الأمثل". ولمزيد من التفاصيل أنظر:

Render, Op. Cit., PP. 233-445.

أما تقنية (SUMT) فيمكن تعريفها بأنها " طريقة تعتمد دالة افتراضية أولية لتجميع دالة الهدف والقيود ومن ثم اختيار قيم افتراضية أولية للحصول على حل أولي ومن ثم تحسين الحل باعتماد العديد من الإجراءات الرياضية المعقدة ". وينوه الباحث صعوبة العمل بهذه الطريقة يدوياً ولابد من اللجوء إلى البرامج المحوسبة لإيجاد الحلول حتى لو كانت المسائل بسيطة أو قليلة المتغيرات. ولمزيد من التفاصيل:

1. Taha, Op. Cit., PP. 450-520.
2. سعيد، همسة ثروت، "التقصي في خوارزميات الأمثلية العامة بالاعتماد على النماذج التربيعية وغير التربيعية "، 2005، أطروحة دكتوراه غير منشورة، كلية العلوم، جامعة الموصل.

أما فلسفة طريقة المعيار الشامل فهي احتواءها على مجموعة إجراءات وخطوات تؤدي بالنهاية إلى إيجاد تصغير للدالة Min.F تعبر عن مربع مجموع الانحرافات النسبية ما بين الحلول المثلى للمسائل الفرعية $f_j(\underline{x}^*)$ ودوالها $f_j(\underline{x})$ الأصلية.

ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً بنموذج لا خطي (تربيعي) يكتب عادةً بالنموذج رقم (9) التالي:

$$\left.\begin{array}{l} \min F_p = \left[\sum_{j=1}^{k}\left[\dfrac{f_j(\underline{x}^*)-f_j(\underline{x})}{f_j(\underline{x}^*)}\right]\right]^p \\ \text{s. to: } g_i(\underline{x}) \le o, \\ \qquad j = 1,2,\dots,k \\ \qquad i = 1,2,\dots,m \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

رابعاً. خوارزمية المعيار الشامل والمخطط الانسيابي لها

تحقيقاً لأهداف البحث، تم إنجاز خوارزمية تفصيلية لمراحل الصياغة وإيجاد الحل النهائي باستخدام طريقة المعيار الشامل لحل مشكلة البحث وكالآتي:

. البداية.

خ$_1$. صياغة مشكلة القرار الرئيسة (MCDM) وفق نموذج (MOMP) التالي تحديداً.

$$\left.\begin{array}{l} \text{VMP} \Rightarrow \max\,[\, f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_j(\underline{x}), \dots, f_k(\underline{x})] \\ \text{s. to: } g_i(\underline{x}) \le o, \\ \qquad j = 1,2,\dots,k \\ \qquad i = 1,2,\dots,m \\ \text{Such that:} \\ P_1 = P_2 = \dots = P_k = 1 \\ W_1 = W_2 = \dots = W_k = 1 \end{array}\right\} \text{نموذج رقم (4) السابق}$$

خ$_2$. تجهيز عداد:

$J = 0$

$J = J + 1$

خ$_3$. اشتقاق نموذج المشكلة الفرعية عند $(J = 1)$:

$$\left.\begin{array}{l} \max\,[\, f_1(\underline{x})\,] \\ \text{s. to: } g_i(\underline{x}) \le o, \quad i = 1,2,\dots,m \end{array}\right\}$$

خ$_4$. اختبار خطية النموذج الفرعي $(J = 1)$ وكالآتي:

.. إذا كان النموذج خطياً (نستخدم طرق حل نماذج البرمجة الخطية مثل Simplex).

.. إذا كان النموذج غير خطياً (نستخدم طرق حل النماذج غير الخطية مثل SUMT).

خ5. إنشاء جدول بالحلول المثلى الأولية المستخرجة من المشاكل الفرعية وكالآتي:

$[\ f_1\ (\underline{x}^*), \underline{x}^*, \ldots, f_k\ (\underline{x}^*), (\underline{x}^*)]$

خ6. اختبار العداد $(J < K)$ وكالآتي:

.. إذا كان $(J < K)$. أذهب إلى خ2.

.. إذا كان $(J = K)$. استمر.

خ7. إعادة صياغة نتائج الحلول المثلى الأولية وفق نموذج (الانحرافات النسبية) التالي تحديداً:

$$\left.\begin{aligned} &\min F_p = \left[\sum_{j=1}^{k} \left[\frac{f_j\ (\underline{x}^*) - f_j\ (\underline{x})}{f_j\ (\underline{x}^*)}\right]\right]^p \\ &\text{s. to: } g_i\ (\underline{x}) \le o, \\ &\qquad j = 1,2,\ldots, k \\ &\qquad i = 1,2,\ldots, m \end{aligned}\right\}$$

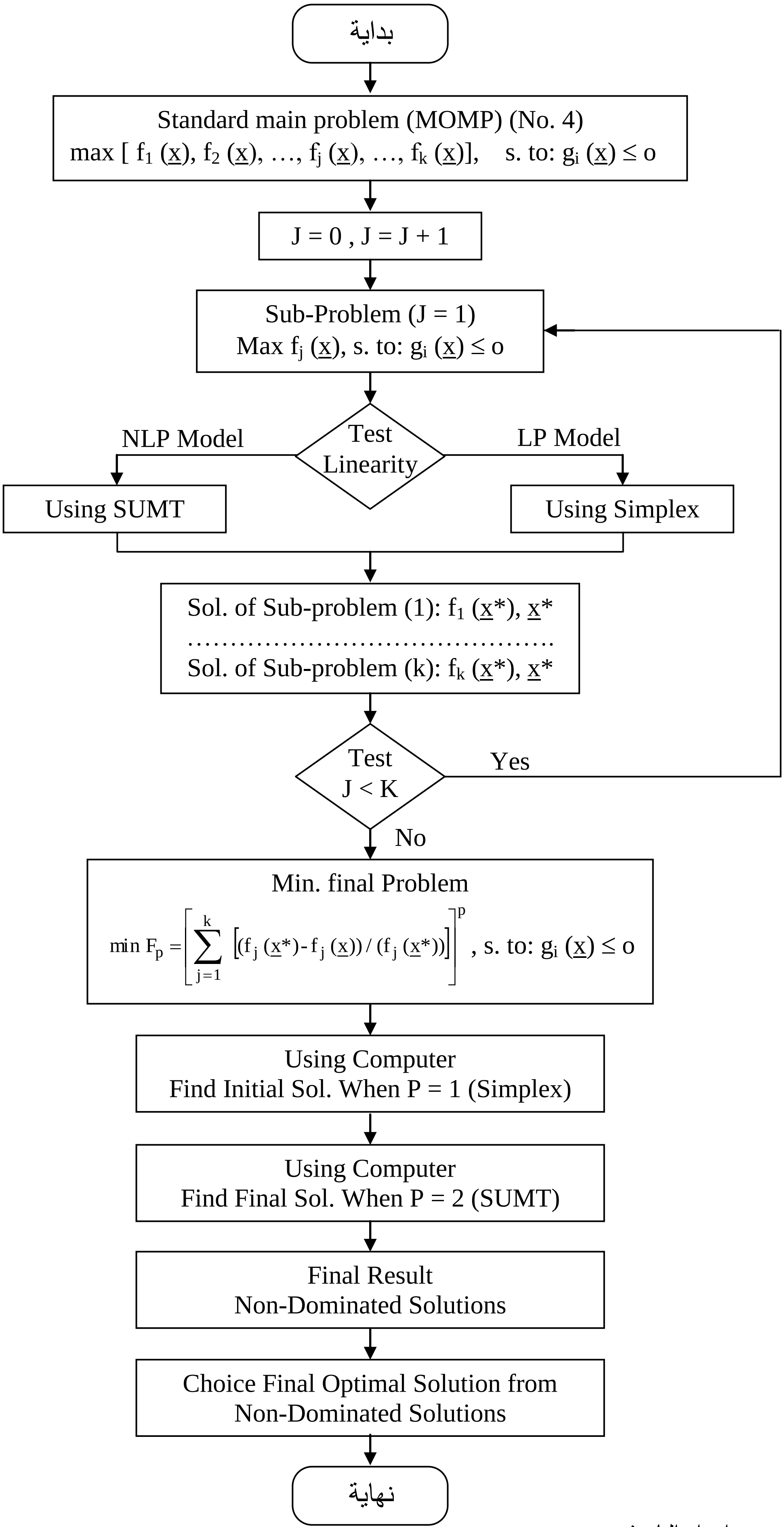
نموذج رقم (9) السابق

خ8. لإيجاد الحل الأولي للنموذج الخطي عند $(P = 1)$. باستخدام Simplex Method.

خ9. لإيجاد الحل النهائي للنموذج التربيعي بوضع $(P = 2)$ باستخدام SUMT Method.

خ10. عمل جدول بأفضل الحلول الممكنة النهائية ومن ضمنها الحل الأمثل (الحلول غير السائدة).

ويمكن التعبير عن الخوارزمية المقترحة أعلاه بالمخطط الانسيابي التالي:



المصدر: من إعداد الباحث.

خامساً. ماهية الحلول غير السائدة

استمر البحث[*] ومحاولة الوصول إلى الحل الأمثل Optimal Solution (والذي يمثل الحد الأقصى الممكن الوصول إليه، ولا يوجد حل أفضل منه إطلاقاً وغالباً ما يكون وحيداً) طيلة عقد الخمسينات والستينات والسبعينات أيضاً. وفي عقد الثمانينات والتسعينات أخذت مصطلحات وحلول أخرى بالظهور فعلياً والاستخدام في كثير من التطبيقات منها مصطلح الحلول المرضية Satisfactory Solution (والذي يمكن تعريفه بأن متخذ القرار يقبل ببديل أقل من الحد الأمثل أو الأقصى) ومصطلح الحلول غير السائدة Non-Dominated Solution تأخذ حيزاً أكبر في التحليلات والاستخدام والسبب يعود طبعاً إلى تطور نماذج البرمجة الرياضية (MP) إلى (MOMP) المولدة لهذه الحلول وسعة استخدامها في عملية اتخاذ وتحليل القرارات تحت عدة معايير (MCDM, MCDA).

ويعرف الحل السائد كالآتي:

" حلاً ممكناً حيث أن الزيادة في قيمة أي معيار يمكن إنجازها فقط على حساب نقصان قيمة على الأقل أحد المعايير الأخرى "،

أو

" حلاً ممكناً لا نستطيع فيه زيادة قيمة أحد الدوال المعظمة إلا بالتأثير سلبياً على الأقل على قيمة دالة تعظيمية أخرى ".

الجانب العملي

بأخذ ما ورد في متن مشكلة البحث النظرية وأهدافه المعلنة، يمكن تمثيل مشكلة البحث كحالة دراسية مفترضة على إحدى المستشفيات الخاصة لصعوبة الحصول على بيانات ذات شفافية ومصداقية عالية في وقتنا الراهن.

ولأن الهدف من البحث هو إبراز طريقة المعيار الشامل بوصفها إحدى الطرق الملائمة لإيجاد العديد من الحلول غير السائدة للمشكلة التي تواجه متخذ القرار والموصوفة نظرياً في مشكلة البحث سابقاً.

وأدناه التعبير عن المشكلة الموصوفة نظرياً بأخذها كحالة دراسية عملية:

(*) ينوه الباحث إن الحل الأمثل سيبقى الهدف الأسمى الذي يشغل بال متخذي القرار. وفي هذا الصدد يقول العالم H. Simon ما معناه " لا أحد سيقبل بالحل المرضي (الذي هو دون الحل الأمثل) إذا ما كان باستطاعته الوصول إلى الحد الأقصى (الحل الأمثل) ".

" مستشفى خاص لديه الرغبة بتعظيم أرباحه من العمليات الجراحية للأطفال، وفي ذات الوقت لديه الرغبة بتعظيم أرباحه من العمليات الجراحية النسائية في ظل محدودية الموارد البشرية المشخص أهمها بالكادر الطبي التخصصي والمساعدين ومحدودية الموارد المادية المشخص أهمها بعدد صالات العمليات ".

وفيما يأتي الخطوات التفصيلية لإيجاد الحل النهائي للمشكلة أعلاه:

أولاً. صياغة المشكلة

في هذه الخطوة الأولية تمّ تحديد ما يأتي:

1. متغيرات القرار : وتمّ تحديدها كالآتي:

X_1 عدد العمليات الكبرى الخاصة بجراحة الأطفال.

X_2 عدد العمليات الوسطى الخاصة بجراحة الأطفال.

X_3 عدد العمليات الكبرى الخاصة بجراحة النسائية.

X_4 عدد العمليات الوسطى الخاصة بجراحة النسائية.

2. المعايير والأهداف: وتمّ تحديدها كالآتي:

المعيار الأول: أرباح قسم جراحة الأطفال: ممثلة بدالة الهدف الأولى f_1 (تعظيم الأرباح المتأتية من جراحة الأطفال).

المعيار الثاني: أرباح قسم الجراحة النسائية: ممثلة بدالة الهدف الثانية f_2 (تعظيم الأرباح المتأتية من جراحة النساء).

علماً أنه لا وجود لأية تفضيلات أو أوزران أو أسبقيات لهذه الدوال لدى متخذ القرار.

3. القيود (الإمكانيات): وتمّ افتراضها كالآتي:

آ. محدودية الكادر الطبي التخصصي.

ب. محدودية الكادر الطبي المساعد.

ج. محدودية صالات العمليات.

ثانياً. بناء النموذج الرياضي

لتمثيل مشكلة البحث المبين أبعادها عند الصياغة، تمّ اختيار التمثيل الرياضي لها بواسطة "نموذج برمجة رياضية متعددة الدوال" باعتباره أفضل نموذج يمثل واقع المشكلة قيد الدراسة وكالآتي:

1. متجه تعظيم المشكلة Vector Maximize Problem

وهو ما يقابل مصطلح دالة الهدف في البرمجة الرياضية التقليدية، وفي هذا النموذج دالتين تراكميتين موصوفة خطياً كالآتي:

$$\text{VMP} \Rightarrow \quad \max f_1 = c_1 x_1 + c_2 x_2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (a)$$
$$\max f_2 = c_3 x_3 + c_4 x_4 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (b)$$

2. القيود Constraints

وتمثل قيود الموارد المتاحة البشرية والمادية المفترضة بشكلٍ خطي وكالآتي:

1. قيد محدودية الكادر الطبي التخصصي

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$
$$a_{23} x_3 + a_{24} x_4 \leq b_2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

إذ يمثل القيد الأول عدد ساعات العمل المتاحة من قبل الأطباء المتخصصين في جراحة الأطفال حصراً، والقيد الثاني يمثل عدد ساعات العمل المتاحة من قبل الأطباء المتخصصين في الجراحة النسائية.

2. قيد محدودية الكادر الطبي المساعد

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 \leq b_3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

3. قيد محدودية صالات العمليات

$$a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 \leq b_4 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

أما القيود المنطقية فيمكن تحديدها ($x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$) كقيود عدم سالبية ويفضل توفر قيد الأعداد الصحيحة لمتغيرات القرار قدر الإمكان x_1, x_2, x_3, x_4 Integer Number.

وبهذا نلاحظ أن النموذج الرياضي المتعدد الدوال يحتوي على (a, b) دالة هدف بأربعة متغيرات قرار و(4) قيود فنية و(2) قيد منطقي.

وبهذا يكون نموذج البرمجة الرياضية المتعدد الدوال الخاص بالحالة الدراسية قيد الحل هو:

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{VMP} \Rightarrow & \max f_1 = c_1 x_1 + c_2 x_2 & \\
 & \max f_2 = c_3 x_3 + c_4 x_4 & \\
\text{s. to:} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 & \leq b_1 \\
 & \qquad a_{23} x_3 + a_{24} x_4 & \leq b_2 \\
\multicolumn{2}{l}{a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4} & \leq b_3 \\
\multicolumn{2}{l}{a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4} & \leq b_4 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 & & \geq 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 & \text{Integer Number} &
\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (10)$$

ثالثاً. خطوات الحل اليدوي والمحوسب بطريقة المعيار الشامل

لعدم توفر حزمة برمجية متكاملة خاصة بإيجاد الحلول النهائية بطريقة المعيار الشامل، فإن التوصل إلى الحلول النهائية سيكون عبارة عن مجموعة من الخطوات اليدوية والمحوسبة بناءً على ما ورد في الخوارزمية والمخطط الانسيابي المقترحان لإنجاز الحلول النهائية.

وبالأخذ بحقيقة إن المشكلة قيد الدراسة في بحثنا هذا هي مشكلة قرار ممثلة رياضياً بالنموذج رقم (4) والمعرف ضمن نماذج (MOMP) بدوال وقيود خطية العلاقة، واحتوائه على أقل عدد من دوال الأهداف ($K = 2$) سيؤدي هذا الوصف والتشخيص للمشكلة إلى اختصار خطوات الخوارزمية العامة عملياً إلى عدد أقل من الخطوات وكالآتي:

خ$_1$. تدوين المشكلة الرئيسية:

يجب أن تكون المشكلة المصاغة عملياً على وفق النموذج الرياضي (MOMP) ومن دون أية أسبقيات P_j أو أوزان W_j مطلقاً وكالآتي:

$$\left.\begin{array}{lll}
VMP \Rightarrow & \max f_1 = 120\$\, x_1 + 130\$\, x_2 & \\
& \max f_2 = 65\$\, x_3 + 40\$\, x_4 & \\
s.\ to: & 2x_1 + 1.5x_2 & \le 35 \\
& \quad 1.8x_3 + 1.3x_4 & \le 50 \\
\multicolumn{2}{l}{0.5x_1 + 0.75x_2 + 1.5x_3 + 1.5x_4} & \le 55 \\
\multicolumn{2}{l}{2x_1 + 1.5x_2 + 1.8x_3 + 1.3x_4} & \le 40 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 & & \ge 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 & \text{Integer Number} &
\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (11)$$

خ$_2$. تجزئة المشكلة الرئيسية إلى K من المشاكل الفرعية:

وبهذا سنحصل على المشاكل الفرعية التالية:

1. When $J = 1 \Rightarrow$ Sub-Problem 1 :

$$\left.\begin{array}{lll}
\multicolumn{2}{l}{\max f_1 = 120\$\, x_1 + 130\$\, x_2} & \\
s.\ to: & 2x_1 + 1.5x_2 & \le 35 \\
& \quad 1.8x_3 + 1.3x_4 & \le 50 \\
\multicolumn{2}{l}{0.5x_1 + 0.75x_2 + 1.5x_3 + 1.5x_4} & \le 55 \\
\multicolumn{2}{l}{2x_1 + 1.5x_2 + 1.8x_3 + 1.3x_4} & \le 40 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 & & \ge 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 & \text{Integer Number} &
\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (12)$$

وبتفحص وتحليل المشكلة الفرعية رقم (1) والممثلة بالنموذج رقم (12) نلاحظ بأنها مشكلة برمجة خطية عامة يمكن حلها بكل سهولة بطريقة السمبلكس. وإن النتائج النهائية المثلى لها يمكن تدوينها بالمتجه التالي:

$[\ x_1^* = 0,\ x_2^* = 23,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 0,\ f_1^* = 2290\$,\ f_2^* = 0\$\ ]$

1. When J = 2 ⇒ Sub-Problem 2 :

$$\left.\begin{array}{llr} \max f_2 = 65\$\ x_1 + 40\$\ x_2 & & \\ \text{s. to:} \quad 2\ x_1 + 1.5\ x_2 & & \leq 35 \\ \quad 1.8\ x_3 + 1.3\ x_4 & & \leq 50 \\ 0.5\ x_1 + 0.75\ x_2 + 1.5\ x_3 + 1.5\ x_4 & & \leq 55 \\ 2\ x_1 + 1.5\ x_2 + 1.8\ x_3 + 1.3\ x_4 & & \leq 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & & \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \text{Integer Number} & \end{array}\right\} \text{.................... (13)}$$

وبتفحص وتحليل المشكلة الفرعية رقم (2) والممثلة بالنموذج رقم (13) نلاحظ بأنها مشكلة برمجة خطية عامة يمكن حلها بكل سهولة بطريقة السمبلكس أيضاً. وإن النتائج النهائية المثلى لها يمكن تدوينها بالمتجه التالي:

$[\ x_1^* = 0,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 22,\ x_4^* = 0,\ f_1^* = 0\$,\ f_2^* = 1430\$\ ]$

خ$_3$. إنشاء جدول الحلول النهائية المثلى للمشاكل الفرعية:

وهنا يتم تدوين الحلول النهائية المثلة التي تم الحصول عليها في خ$_2$ حصراً، وتكتب على شكل جدول يطلق عليه جدول الدفع Pay off Table وكالآتي:

الجدول (1)

جدول الدفع

$f_j(\underline{x})$ \ $f_j(\underline{x}^*)$	$f_1(\underline{x}^*)$	$f_2(\underline{x}^*)$	x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*
$f_1(\underline{x}) = 120\$\ x_1 + 130\$\ x_2$	2990$	0	0	23	0	0
$f_2(\underline{x}) = 65\$\ x_1 + 400\$\ x_2$	0	1430$	0	0	22	0

خ$_4$. صياغة نموذج الانحرافات النهائي:

استناداً إلى ما تم إنجازه من حلول مثلى أولية مدونة في جدول الدفع رقم (1) أعلاه. يمكن صياغة نموذج تدنية مربع مجموع الانحرافات النسبية للفروقات ما بين نتائج الحلول المثلى $f_j\,(\underline{x}^*)$ والدوال الأصلية $f_j\,(\underline{x})$ وكالآتي:

$$\left.\begin{aligned}
\min F_p &= \left[\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{f_j\,(\underline{x}^*)-f_j\,(\underline{x})}{f_j\,(\underline{x}^*)}\right]\right]^p \\
&= \left[\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{f_j\,(\underline{x}^*)-f_j\,(\underline{x})}{f_j\,(\underline{x}^*)}\right]\right]^2 \\
&= \left[\frac{2290-(120x_1+130X_2)}{2290}\right]^2+\left[\frac{1430-(65x_1+40X_2)}{1430}\right]^2 \\
\text{s. to:}\quad & 2\,x_1 + 1.5\,x_2 \le 35 \\
& 1.8\,x_3 + 1.3\,x_4 \le 50 \\
& 0.5\,x_1 + 0.75\,x_2 + 1.5\,x_3 + 1.5\,x_4 \le 55 \\
& 2\,x_1 + 1.5\,x_2 + 1.8\,x_3 + 1.3\,x_4 \le 40 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

خ$_5$. استخراج أفضل الحلول الممكنة النهائية:

يمكن ملاحظة أن النموذج أعلاه رقم (14) يمثل مشكلة برمجة لا خطية (تربيعية) يمكن حلها بالاعتماد على تقنية التصغير المتعاقب غير المقيد SUMT المحوسبة وكالآتي:

إن تقنيـــة SUMT تتطلـــب جهـــداً متميـــزاً لتحديـــد المتغيـــرات الأساســـية الأوليـــة (Initial Value) للوصول إلى الحل الأمثل النهائي.

وبإجراء أكثر من 40 محاولة إدخال، تم حصر أفضل 10 نتائج ودونت تفاصيلها في الجدول (2) التالي:

الجدول (2)

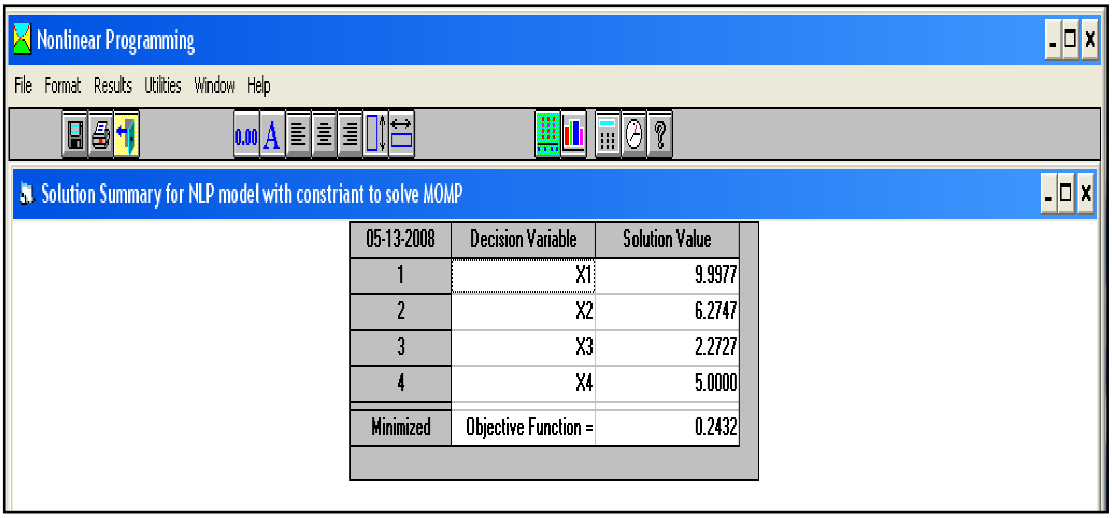
أفضل الحلول الممكنة بأعدادها الكسرية الأصلية

No.	Decision Variables				Min $F_{P=2}$
	X_1	X_2	X_3	X_4	Min
1	8.4990	5.0088	5	5	0.4194
2	10.0242	5.0004	3.3061	5	0.3082
3	8.4998	5.0002	5	5	0.4194
4	8.4998	5.0002	5	5	0.4194
5	9.9977	6.2747	2.2727	5	0.2432
6	7.9982	5.6684	5	5	0.4155
7	5.0225	5.023	5.2339	10	0.7349
8	9.9977	5.0692	4	4	0.3062
9	6.1991	6.0005	6	6	0.5433
10	8	5	5	5	0.4194

رابعاً. التحليلات

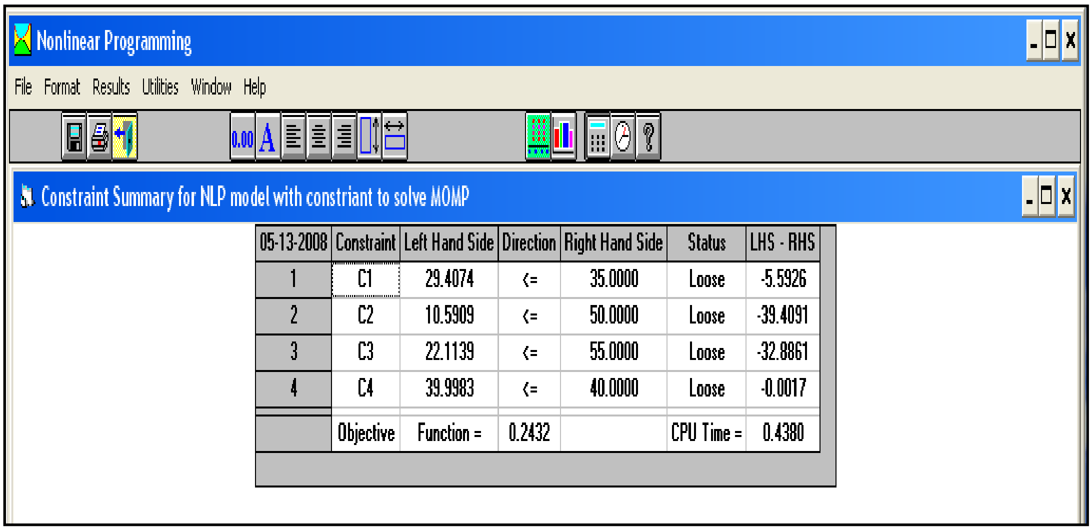
1. التحليلات استناداً إلى نتائج طريقة المعيار الشامل:

- إن الحلول النهائية المتحصل عليها في الجدول (2) السابق الناتجة من الحل بطريقة المعيار الشامل للنموذج (MOMP) من دون أسبقيات P_j ولا أوزان W_j المدون في النموذج التطبيقي رقم (14)، ينطبق عليها عملياً التعريف النظري للحلول غير السائدة مع الانتباه أنه يمكن اعتماد الحل رقم (5) حلاً أمثلاً من بين هذه الحلول والأشكال رقم (3) ورقم (4) أدناه تمثل النتائج النهائية لمتغيرات القرار الخاصة بالحل الأمثل رقم (5) ونتائج القيود الخاصة بذات الحل أيضاً، وسيتم تحليل ذلك تفصيلاً لاحقاً.



الشكل (3)

نتائج متغيرات القرار للحل الأمثل رقم (5)



Nonlinear Programming

File Format Results Utilities Window Help

Constraint Summary for NLP model with constriant to solve MOMP

05-13-2008	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Status	LHS - RHS
1	C1	29.4074	<=	35.0000	Loose	-5.5926
2	C2	10.5909	<=	50.0000	Loose	-39.4091
3	C3	22.1139	<=	55.0000	Loose	-32.8861
4	C4	39.9983	<=	40.0000	Loose	-0.0017
	Objective	Function =	0.2432		CPU Time =	0.4380

الشكل (4)

نتائج القيود للحل الأمثل رقم (4)

- إن الحلول الممكنة النهائية في الجدول (2) السابق لا تتلاءم منطقياً مع طبيعة متغيرات القرار (عمليات جراحية) والتي تُمثل بأعداد صحيحة. ولهذا لابد من تقريبها من صورتها الكسرية حالياً إلى أعداد صحيحة.
- عند إجراء عملية التقريب فلابد من الاحتفاظ بجوهر نوعية هذه الحلول والتي هي بالأصل يمكن تعريفها بكل بساطة بأنها حلول ممكنة Feasible Solution وهذا يعني أنها كانت تحقق جميع قيود المشكلة معاً ويجب أن يستمر تحقق هذا الشرط الجوهري ما بعد عملية التقريب واستثناء كل التقريبات التي قد تتجاوز هذه القيود. وسيتم الاعتماد لهذه التقريبات على الفرق ما بين موارد القيد الرابع والمستغل منه وهذا يعني الفرق ما بين R.H.S و.L.H.S للقيد الأكثر تشدداً وفعالية C4 مقارنة ببقية حلول المشكلة التي مازال يوجد فيها فائض غير مستغل.
- الجدول (3) أدناه يمثل ملخص الحلول النهائية بأعدادها الصحيحة المحولة بعد استبعاد جميع الحلول غير الممكنة (خارج منطقة الحل الممكنة) وكذلك حذف المتطابق منها.

الجدول (3)

أفضل الحلول الممكنة بأعدادها الصحيحة

تسلسل الحلول	نتائج متغيرات القرار				نتائج دوال الهدف		الأرباح الإجمالية	معيار $\min f_{p=2}$	$L.H.S \le R.H.S$
	x_1	x_2	x_3	x_4	$f1^*=120\$\ x_1+120\$\ x_2$	$f2^*=65\$\ x_1+40\$\ x_2$	Total Profit= $f_1^*+f_2^*$	Criteria	C4
1	8	5	5	5	1610$	525$	2135$	0.4194	$39\le 40$
2	10	5	4	4	1850$	420$	2270$	0.3082	$39.9\le 40$
3	6	6	6	6	1500$	650$	2130$	0.5433	$39.6\le 40$
4	10	6	3	4	1980$	355$	2335$	0.2432	$39.6\le 40$

وبتحليل نتائج الجدول (3) أعلاه نجد ما يلي:

1. إن الحل الأمثل استناداً إلى مخرجات الحاسوب اعتماداً على خوارزمية المعيار الشامل هو الحل رقم (4) اعتماداً على أقل قيمة تصغيرية تحققها دالة الانحرافات النسبية $min\ f = 0.2432$ بعد التقريب في الجدول (3) أعلاه، والذي يمكن تمثيله بالمتجه التالي:

[$x_1 = 10, x_2 = 6, x_3 = 3, x_4 = 4, f_1 = 1980\$, f_2 = 355\$$, Total Profit = 2335$] ...(A)

وهذا يعني تفصيلياً ما يلي:

$x_1 = 10$ (تمثل عدد العمليات الجراحية أطفال / كبرى)

$x_2 = 6$ (تمثل عدد العمليات الجراحية أطفال / وسطى)

$x_3 = 3$ (تمثل عدد العمليات الجراحية نساء / كبرى)

$x_4 = 4$ (تمثل عدد العمليات الجراحية نساء / وسطى)

وإن أرباح الدوال f_1 وf_2 تفصيلياً هي:

Max f_1 = 1980$
Max f_2 = 335$

وهذا سيؤدي بالاستنتاج إلى أن الأرباح الإجمالية هي:

Total Profit = 2335$

2. إن جميع الحلول النهائية ذو التسلسل 1، 2، 3، 4 المدونة في الجدول (3) السابق هي بالأصل حلولاً ممكنة لكنها توصف بأنها حلولاً غير سائدة Non-Dominated Solutions كما ذكرنا سابقاً ويمكن توضيح ذلك تحديداً كالآتي:

- إذا ما أردنا زيادة قيمة الدالة f_1 المقدرة بـ 1610$ في الحل رقم (1) فإن ذلك ممكناً من خلال الحل رقم (2) لتصبح 1850$ لكن ذلك لن يتم إلا على حساب النقصان في قيمة الدالة f_2 من 525$ إلى 420$.
- إذا ما أردنا زيادة قيمة الدالة f_2 تحديداً والمقدرة بـ 420$ في الحل رقم (2) فإن ذلك ممكناً أيضاً من خلال الحل رقم (3) بمقدار 650$ لكن ذلك لن يتم إلا على حساب النقصان في قيمة الدالة f_1 من 1850$ إلى 1500$.

3. إن الحل الأمثل استناداً إلى مجموع الأرباح الإجمالية هو الحل رقم (4) أيضاً بقيمة مقدارها 2325$ وإن الحل الأقرب إليه بالترتيب هو الحل رقم (2) بقيمة مقدارها 2270$ وبعد ذلك سيكون الحل رقم (1) بقيمة مقدارها 2135$ والحل رقم (3) بقيمة مقدارها 2130$ على التوالي.

4. إن محاولة تغيير قيمة الدالة f_1 أو f_2 سيكون له تأثيراً مباشراً على مجموع الأرباح الكلية قد يكون إيجابياً عند تغيير f_1 في الحل رقم (1) إلى الحل رقم (2) (من 1135$ إلى 2270$) أو قد يكون سلبياً في أحيان أخرى فعند تغيير f_2 في الحل رقم (2) إلى الحل رقم (3) فإن ذلك سيؤدي إلى نقصان من (2270$ إلى 2230$).

2. التحليلات استناداً إلى نتائج (LP) و(MOLP):

لمعرفة موقع الحلول المستخرجة بطريقة المعيار الشامل والمبينة في الجدول (3) على خط الأعداد الحقيقية، سيتم مقارنة وتحليل هذه النتائج استناداً إلى ما يمكن التوصل إليه من نتائج نهائية إذا ما صيغت المشكلة قيد الدراسة (افتراضياً)[*] على إنها:

1. مشكلة برمجة رياضية (MP) تقليدية تمتلك دالة هدف وحيدة لتعظيم الأرباح الإجمالية وبهذا سيكون النموذج عند الصياغة هو نموذج برمجة خطية (LP).
2. مشكلة برمجة رياضية متعددة الدوال (MOMP) لكنها تحتوي أسبقيات للدوال $P_1,\ \ P_2$ الربحية المعايير $f_1,\ \ f_2$ ، وبهذا سيكون لدينا تحديداً نموذجين للبرمجة الخطية المتعددة الدوال (أو الأهداف) (MOLP) متطابقان بالشكل ومختلفان جوهرياً بتسلسل الأسبقيات للدوال f_1 , f_2 قيد الدراسة، وبهذا سيكون لدينا نموذجين هما (MOLP1)، (MOLP2).

فيما يلي تفاصيل الصياغة والحلول لكلا الحالتين أعلاه (1 و2):

1. إن صياغة مشكلة البحث على إنها مشكلة (MP) تقليدية ستشكل لدينا نموذج (LP) التالي:

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{VMP} \Rightarrow & \max f = 120\$\ x_1 + 130\$\ x_2 + 65\$\ x_3 + 40\$\ x_4 & \\
\text{s. to:} & 2\ x_1 + 1.5\ x_2 & \le 35 \\
 & \qquad\qquad 1.8\ x_3 + 1.3\ x_4 & \le 50 \\
\multicolumn{2}{l}{0.5\ x_1 + 0.75\ x_2 + 1.5\ x_3 + 1.5\ x_4} & \le 55 \\
\multicolumn{2}{l}{2\ x_1 + 1.5\ x_2 + 1.8\ x_3 + 1.3\ x_4} & \le 40 \\
\multicolumn{2}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4} & \ge 0 \\
\multicolumn{2}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \qquad \text{Integer Number}} &
\end{array}\right\} \ldots\ldots (15)$$

إن النتائج النهائية للنموذج أعلاه يمكن تلخيصها بالمتجه التالي:

$$[\ x_1 = 0,\ x_2 = 23,\ x_3 = 3,\ x_4 = 0,\ \text{Total Profit} = 3185\$\ ] \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

---

[*] إن هذا الافتراض هو بالحقيقة أبسط أنواع تحليل الحساسية المستخدم في نماذج (MCDM) المسمى What...if والغاية منه إظهار موقع النتائج المستخرجة النهائية مقارنة بنتائج بديلة مفترضة.

2. إن صياغة مشكلة البحث على إنها (MOMP) ذات أسبقيات P_1, P_2 للدوال f_1, f_2 قيد الدراسة سيشكل لدينا ما يلي:

أ. نموذج (MOLP1) رقم (16) يمتلك أسبقيات p_1, p_2 لدوال f_1, f_2 وكالآتي:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{VMP} \Rightarrow \max f = [\, P_1\,(120\$\, x_1 + 130\$\, x_2)\,,\ P_2\,(65\$\, x_3 + 40\$\, x_4)] \\
\text{s. to:} \quad 2\,x_1 + 1.5\,x_2 \qquad \le 35 \\
\qquad 1.8\,x_3 + 1.3\,x_4 \qquad \le 50 \\
0.5\,x_1 + 0.75\,x_2 + 1.5\,x_3 + 1.5\,x_4 \qquad \le 55 \\
2\,x_1 + 1.5\,x_2 + 1.8\,x_3 + 1.3\,x_4 \qquad \le 40 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \qquad \ge 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \qquad \text{Integer Number} \\
\qquad P_1 >>> P_2
\end{array}\right\} \text{......}\ (16)$$

إن النتائج أعلاه يمكن تلخيصها بالمتجه التالي:

$[x_1 = 0, x_2 = 23, x_3 = 3, x_4 = 0, f_1 = 2990\$, f_2 = 195\$, \text{Total Profit} = 3185\$]$..(C)

ب. نموذج (MOLP2) رقم (17) يمتلك أسبقيات p_1, p_2 لدوال f_2, f_1 وكالآتي:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{VMP} \Rightarrow \max f = [\, P_1\,(65\$\, x_3 + 40\$\, x_4)\ ,\ P_2\,(120\$\, x_1 + 130\$\, x_2)] \\
\text{s. to:} \quad 2\,x_1 + 1.5\,x_2 \qquad \le 35 \\
\qquad 1.8\,x_3 + 1.3\,x_4 \qquad \le 50 \\
0.5\,x_1 + 0.75\,x_2 + 1.5\,x_3 + 1.5\,x_4 \qquad \le 55 \\
2\,x_1 + 1.5\,x_2 + 1.8\,x_3 + 1.3\,x_4 \qquad \le 40 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \qquad \ge 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \qquad \text{Integer Number} \\
\qquad P_1 >>> P_2
\end{array}\right\} \text{......}\ (17)$$

إن النتائج أعلاه يمكن تلخيصها بالمتجه التالي:

$[x_1 = 16, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 3, f_1 = 390\$, f_2 = 1120\$, \text{Total Profit} = 1510\$]$..(D)

بتحليل النتائج الممثلة بالمتجهات أعلاه (B) و(C) و(D) نجد ما يلي:

1. ارتفاع الأرباح الإجمالية لنموذجي (LP) و(MOLP1) إلى حد أقصى مقدر بـ3185$.
2. انتخفاض الأرباح الإجمالية لنموذج (MOLP2) تحديداً إلى 1510$.
3. نموذجي (LP) و(MOLP1) تحديداً يحتويان على قيماً صفرية لمتغيرات القرار $x_1=x_4=0$ أو $x_3=0$ على التوالي، وهذا يعني إنها حلولاً منحلة بلغة البرمجة الرياضية.

3. التحليلات والمقارنات استناداً إلى تحليل القرارات تحت عدة معايير (MCDA):

لمعرفة مدى واقعية ومنطقية الحلول المستخرجة بطريقة المعيار الشامل وعقلانية هذه الحلول عند التطبيق وبما يقدم أفضل المنافع المادية والمعنوية للنظام قيد الدراسة ويقلل المخاطر في المدى المنظور القريب والبعيد. لابد من إجراء تحليلات ومقارنات وتقييمات لهذه الحلول مقارنة بالحلول الافتراضية لنموذجي (LP) و(MOLP) وكالآتي:

- **الحل الأمثل باستخدام نموذج (LP):**

[$x_1 = 0, x_2 = 23, x_3 = 0, x_4 = 0$, Total Profit = 3185$].............................(B)

- **الحلول المثلى باستخدام نموذج (MOLP):**

[$x_1 = 0, x_2 = 23, x_3 = 3, x_4 = 0, f_1 = 2990$\$, $f_2 = 195$\$, Total Profit = 3185$]...(C)

[$x_1 =16, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 3, f_1 = 390$\$, $f_2 = 1120$\$, Total Profit = 1510$]...(D)

- **الحل الأمثل باستخدام طريقة المعيار الشامل:**

[$x_1= 10, x_2= 6, x_3= 3, x_4= 4, f_1= 1980$\$, $f_2= 355$\$, Total Profit = 2335$]…(A)

بتحليل وتقييم ومقارنة المتجهات أعلاه (A, B, C, D) يمكن تدوين ما يلي:

1. إن النتائج النهائية لنموذج (LP) ونموذج (MOLP1) تعطينا أرباح إجمالية قصوى تقدر بـ(3185$) وهي تفوق ما يمكن تحقيقه بطريقة المعيار الشامل والمقدرة (2335$) إلا أن ذلك سيعطل الطاقات الطبية التخصصية والمساعدة المتاحة في أقسام جراحية أخرى بجعل ($x_1=x_4=0$)، بينما الحل الذي تقدمه طريقة المعيار الشامل هو تفعيل شامل لجميع الطاقات الطبية التخصصية والمساعدة بصورة متوازنة ووسطية ممثلة بالنتائج ($x_1=10, x_2=6, x_3=3, x_4=4$).
2. أما النموذج (MOLP2) فيعطي أرباحاً متدنية تقدر بـ1510$ مقارنة بالنماذج الأخرى القصوى منها (LP) و(MOLP1) والبالغ 3185$ وكذلك طريقة المعيار الشامل البالغ 2335$.
3. توليد بطالة مقنعة تخص الكادر الطبي المتخصص والمساعد في المستشفى بجعل ($x_1=x_4=0$) في نموذجي (LP) و(MOLP1) وبطالة أقل في نموذج (MOLP) بجعل ($x_3=0$) وهذا يمثل هدر للطاقات البشرية التخصصية والمساعدة ويمثل أيضاً هدر بالأموال التي تدفع كرواتب شهرية لهم.

4. إن هـذه الحلـول ربمـا تقـدم أرباحـاً عاليـة قصـوى للمستشـفى حاليـاً نمـوذجي (LP) و(MOLP1) ولا تأخذ عنصر المخاطر العالي (High Risk) في حالة انخفاض الطلب على العمليات من النوع الأكثر ربحية (x_2) أو ارتفاع الطلب على العمليات التخصصية الأخرى وهي (x_1, x_4) وكلا الاحتمالين وارد جداً في المدى القريب والبعيد.

الاستنتاجات:

1. الاستنتاجات النظرية:

- إن (MCDM) و(MCDA) تهتم بإنجاز حلول ممكنة ربما تكون أقل أمثلية لكنها أكثر حكمة وواقعية وأقل مخاطرة عند إجراء التقييمات عليها.
- إن نمـاذج (MOMP) تمثـل العمـود الفقـري الـذي تعتمـده عمليـات (MCDM) و(MCDA) في الصياغة والحل لمشاكل القرار المقيدة خصوصاً.
- طريقـة المعيـار الشـامل ينحصـر تطبيقهـا فـي نمـاذج (MOMP) التـي لا تحتـوي علـى أسبقيات P_j أو أوزان W_j سواءً إن كانت خطية أو لا خطية.

2. الاستنتاجات العملية:

- طريقة المعيار الشامل تمتلك العديد من الحلول غير السائدة التي يمكن أن يكون إحداها حلاً أمثلاً فعلياً يمكن لمتخذ القرار الأخذ بأي منها حسب قناعاته الشخصية، وهذا ينطبق على نتائج بحثنا الممثلة باختصار في الجدول (3).
- قيمة الحل الأمثل المقدم من قبل طريقة المعيار الشامل ممثلاً بالمتجه:

[x_1= 10, x_2= 6, x_3= 3, x_4= 4, f_1= 1980$, f_2= 355$, Total Profit = 2335$]

يعتبر حلاً أكثر حكمة وأقل مخاطرة ويستطيع أن يواجه التقلبات في الطلب على المستوى القريب والبعيد ومن دون هدر للطاقات أو الأموال داخل المستشفى قيد الدراسة.

- إن أفضـل الحلـول غيـر السـائدة بطريقـة المعيـار الشـامل تعطـي قيمـاً ربحيـة إجماليـة (2335$) يمكن الزيادة والنقصان بالربحية لكل دالة f_1, f_2 لكن سيتم ذلك على حساب الدالة الأخرى.

التوصيات:

1. الاهتمام بمفاهيم وأساليب (MCDM) و(MCDA) لحل مشاكل القرار المقيدة وغير المقيدة والتي ربما يمكن صياغتها وفق نماذج (MOMP) بأنواعها المختلفة.
2. الاهتمام بأنظمة الدعم العلمي المحوسب (DSS) لاستنتاج قرارات أكثر شفافية وواقعية وثبوتاً على المدى البعيد والقريب.
3. تطبيق طريقة المعيار الشامل على مشكلة القرار قيد الدراسة للحصول على حلول أكثر وسطية واستقراراً وأقل هدراً بالأموال والطاقات، كذلك أقل مخاطرةً بالمستقبل حتى إن كانت ربما ذات قيماً ربحية إجمالية عليا ليست قصوى.

المصادر:

1. العلاف، خالد عبدالله، " استخدام البرمجة الهدفية في تخطيط الإنتاج بالتطبيق على معمل الألبان في الموصل "، 1988، رسالة ماجستير غير منشورة، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة الموصل.
2. العلاف، خالد عبدالله، " التغير في صناعة القرار: من المعيار الواحد إلى تعددية المعايير"، 2008، المؤتمر الدولي العلمي الثامن، جامعة الزيتونة الأردنية، عمان، الأردن.
3. سعيد، همسة ثروت، "التقصي في خوارزميات الأمثلية العامة بالاعتماد على النماذج التربيعية وغير التربيعية "، 2005، أطروحة دكتوراه غير منشورة، كلية العلوم، جامعة الموصل.
4. Hamalainen, Raimo P., "Decisionnarium-Aiding Decisions, Negotiating and Collecting Opinions on the Web" 2008, to appear in Journal of MCDM.
5. Hwang, C. L., S. R. Paidy, K. Yoon and A. S. M. Masud "Mathematical programming with multiple objectives: A Tutorial", "Computer and Operation Research", 1980, Vol. 7.
6. Mustajoki, Jyri and Hamalainen, Raimo P., "Web-Hipre: Global Decision Support by Value tree and AHP Analysis", 2000, INFOR., Vol. 38, No. 3, Aug., PP. 208-220.

7. Render, Barry, Ralph M. Stair Jr. & Michael E. Hanna, "Quantitative Analysis for Management", 8th.ed., 2003, Prentice-Hall, New Jersey, USA.
8. Taha, Hamdy A., "Operations Research: An Introduction", 7th ed., 2003, Prentice Hill, USA.
9. Winston, Wayne L., "Operation research: Applications and algorithm", 1994, Duxbury Press , U. S. A.
10. Zeleny, M., "Multiple Criteria Decision Making", 1982, McGraw-Hill, Inc., USA.